

AL-BULU'U
AL-NAHSH
AL-NAHSH

كتابا
الروضة الزهرية
في
الاصول الجبرية

893.7195
128

بسم الله المبدى المعيد

الحمد لله الملك الوهاب الذي بيده الجبر والكسر واليه المرجع والمآب . اما بعد
فيقول العبد الفقير الى عفوه تعالى كرنيليوس فنديك الاميركاني هذا كتاب في علم
الجبر الحسابي قد علفت فيه ما امليت على بعض التلامذة في مدرسة عبيه احدى
قرى جبل لبنان سنة ١٨٤١ للتاريخ المسيحي سالكا فيه مسلك بعض العلماء الاميركانيين .
ثم اضفت اليه زيادات اخرى من كتب بعض العلماء الفرنسيين والانكليزيين .
وتركت الكلام على اللغزات الى كتاب اخر اريد ان اعقبه به ان شاء الله . والله
المسؤول ان يجعله خالصا لوجهه الكريم نافعاً بفضل العيم . فانه اكرم مسؤول
واعظم مأمول

مقدمة

في العلوم التعليمية بالاجال

١ موضوع العلوم التعليمية الكم وهو كل ما يقبل الزيادة او الانقسام او
القياس . فكل من الخط والوزن والعدد والوقت كم . وليس كذلك الالوان
والافعال العقلية ونحوها

٢ جميع اقسام التعليمات مبني على الحساب والجبر والهندسة . اما الحساب
فهو علم الاعداد . ومعرفته ضرورية لمعرفة ما سواه من هذه العلوم . واما الجبر فهو
طريق للعد بواسطة احرف وعلامات اخر . ويقال للطبقة العليا منه حساب التام
والنفاصل . وهو لا يدخل في كتب الجبر لسموه بل يقام علماً بنفسه . واما الهندسة فهي
قسم من التعليمات موضوعه المقدار وهو كم ذو امتداد اي كل ماله واحد من ثلاثة
اشياء وهي الطول والعرض والعمق ويقال لها الابعاد الثلاثة . ولذلك يكون كل من
الخط والسطح والجسم مقدارا دون الحركة فانها وان كانت كما لكنها لا تعد مقدارا اذ

ليس لها شيء من الابعاد المذكورة. واما حساب المثلثات وقطع المخروط فيها علمان تستعمل فيها القواعد التعليمية لمعرفة المثلثات والمخطوط الحاصلة من قطع مخروط.

٢ التعاليم نوعان محضة وازفافية او ممتزجة. اما المحضة فهي المختصة بالكميات المجردة عن المواد. واما الازفافية فهي استعمال قواعد تعليمية لمعرفة شيء من خصائص الهيولي او لانعام شيء من المصالح اليومية كما في التجارة وعلم المساحة وعلم البصريات وعلم الهيئة ونحو ذلك

٤ ان للتعاليم المحضة منزلة على سائر العلوم من حيث وضوح قواعدها وقوة براهينها. حتى ضرب بها المثل في الابضاح والتبيين ومن حيث كثرة استعمالها ولزومها في المصالح والعلوم كافة. وايضا لسبب تأثيرها في القوى العقلية بتقويتها وتوسيعها. فان درسها يدرّب العقل على الاتجاه بكل قواه نحو امير ما وعلى انحصاره في موضوع ما بدون ان يتشتت. وينمّ حذقة عظيمة في الكشف عن فساد او فسطة في برهان او قضية. ولذلك تكون معرفتها مفيدة جدا لكل واحد ولو كان غير منفرّج الى ممارسة علمائها



الفصل الاول

في الاشارات الجبرية والكميات السلبية والاوليات

٥ الجبر علم يبحث فيه عن نسب الكميات باستعمال احرف واشارات اخر. وله منزلة على علم الحساب لان مسائله اعم ولانه تستعمل فيه الاحرف الهجائية عوض الاعداد كبيرة كانت ام صغيرة. وايضا لانه تستعمل فيه كميات مجهولة كانت معلومة. فالاحرف التي تنوب عن كميات عددية في الجبر ليس لها قيمة في ذاتها ولكن تُقرض لها قيمة معلومة في كل مسئلة على مقتضى شروطها. وقد تكون تلك القيمة معلومة وقد تكون مجهولة كما سترى. فان كانت معلومة يوضع عوضها حرف من حروف الهجاء الاول كالالف والباء والتاء وما يليها. وان كانت مجهولة تستعمل عوضها الحروف الاخيرة كالكاف واللام والميم وما يليها

٦ بدّل على الجمع بخط عريض يقطعه خط عمودي هكذا + وعلى الطرح بخط عريض فقط هكذا - فالكميات التي تنفذها العلامة الاولى تسمى ايجابية. والتي

تقدمها الثانية يقال لها سلبية. والتي تقدمها كلها تسمى ملتبسة. فلو وضع ت +
 ت - س كان المراد فضلة س ومجموع ت وب ونقرأت مع ب الأس. ولو وضع
 ت + ب لقرئ ت مع او الأب. والتي لا تقدمها علامة تقدّر لها علامة ايجابية اي
 علامة الجمع. ولو وضع ت - ب او س - د لكان المراد فضلة ت وب او فضلة س
 ود بدون تعيين اي هو المطروح واي هو المطروح منه. ويدل على المساواة بين
 كيتين بخطين عرضيين متوازيين هكذا = فلو وضع ت + ب = س - د لقرئ
 مجتمع ت وب يعدل فضلة س ود. ومثال ذلك في الارقام الهندية $16 - 4 = 10 = 2 + 7 = 2 + 12$ ولو وضع ت < ب كان المراد ان
 كمية ت اعظم من كمية ب. وبالعكس ت > ب

٧ متى تقدم كمية رقم هكذا ٣ ت او ٩ ل او ١٠ ك كان المراد تكرار الحرف
 مراراً تماثل الأحاد في ذلك الرقم. فيقرأ ثلث مرات وتسع مرات ل وعشر مرات
 ك ويقال لذلك الرقم سمي. وهكذا $\frac{1}{3}$ ن. و $\frac{2}{4}$ م فيراد ثلث ن وثلثة ارباع م. وان
 لم يتقدم كمية سمي بقدرها واحد سمي. فان ت مثلاً يراد به ا ت. وقد يكون المسمّى
 حرفاً هكذا م ك فيراد تكرار ك مراراً تماثل الأحاد في م اي ميم من. ولو قيل ٣ ت
 ب لكان ٣ ت سمي ب. ولو قيل ٤ ك ل كان ٤ ك ل سمي د وقس على ذلك
 ٨ الكمية المركبة هي التي ارتبطت اجزاؤها بعلامة الجمع او الطرح. مثالها س
 + د و ر + س - ك و ٣ ت + ب. وما سواها بسيطة مثالها ت ورك و ٣ م س ل.
 وان كان لها جزآن سميت ثنائية مثل ت + ب و س - د ويقال للاخيرة فضلية
 ايضاً. وان كان لها ثلاثة اجزاء يقال لها ثلاثية او ذات ثلثة حدود. او اربعة فرباعية
 او ذات اربعة حدود. وهلمّ جراً. وان اريد معاملة عن اجزاء من كمية مركبة معاملة
 واحدة يجب رسم خط فوقها او حصرها بين قوسين هكذا ت - د + س او (ت -
 د) + س فيراد اضافة س الى فضلة ت ود وهكذا ت + ب - س + د او (ت
 + ب) - (س + د) يراد به طرح مجموع س ود من مجموع ت وب. ويقال
 لحرف او لعدّة احرف مرتبطة على ما تقدم عبارة جبرية

٩ يدلّ على الضرب بخطين يتقاطعان هكذا \times او بنقطة بين المضروب
 والمضروب فيه. مثاله ت \times ب او ت . ب فيقرأ ت في ب. وهكذا س + د

× ن - م فيقرأ مجموع س ود في فضلة ن وم ويقال للضروب والمضروب فيه اضلاع. فتنقل الكمية الى اضلاعها متى انكثت الى كميات اذا ضرب بعضها في بعضي تحصل الاصلية. فان م^٢ م^٢ م^٢ مثلاً تنقل الى م^٢ وم^٢ م^٢ لان م^٢ × م^٢ × م^٢ = م^٦ م^٢ و٤٨ تنقل الى ٢٤ و٢ او الى ١٦ و٢ او الى ٦ و٨ وهلم جراً

١٠. يُدَلُّ على القسمة بخط عرضي له نقطة من فوقه ونقطة من تحته هكذا ٨ +

٢ اي قسمة ٨ على ٢ او بكتابة المقسوم والمقسوم عليه على هيئة كسر دارجي هكذا $\frac{٨}{٢}$ فيقرأ الخارج من قسمة ت على ب وهكذا $\frac{٨}{٢} = ٤$ فيقرأ الخارج من قسمة فضلة س ود على مجموع ت وم. واما النسبة في الجبر فيُدَلُّ عليها كما يُدَلُّ في الحساب. مثالها ت ب : س د :: م + ن : ك + ل

١١ اذا تشابهت الاحرف والقوات كانت الكميات متشابهة ولا فغير متشابهة. فان ٢ ب وب ٤ ب كميات متشابهة. وكذلك م^٢ ن و٦ م ن وم ن و- م ن و- ٨ م ن اما ٢ ت و٣ م و٢ ب ك فغير متشابهة ولو كانت المسميات متساوية. وكذلك ب وب^٢ و٢ ب كميات غير متشابهة ايضاً

١٢ مكفوه الكمية هو الخارج من قسمة واحد على تلك الكمية. فمكفوت مثلاً هو $\frac{١}{٢}$ ومكفوت ٤ هو $\frac{١}{٤}$ ومكفوت + ب هو $\frac{١}{٢} + ب$

١٣ الكمية السلبية هي التي يجب طرحها. ففي التجارة مثلاً يكون الربح ايجابياً والخسارة سلبية. وان كان صعود جسم عن سطح الارض ايجابياً يكون هبوطه سلبياً. وان كان جري مركب الى الشمال ايجابياً يكون جريه الى الجنوب سلبياً. وقد يكون السليبي اكبر من الايجابي الذي يجب الطرح منه كما اذا كان راس مال تاجر ١٠٠٠ والدين عليه ١٥٠٠ دينار

١٤ الاولى قضية واضحة لا تقبل زيادة ابضاح. والاوليات التعليمية التي يحتاج اليها بالاكثري هذه

- ١ اذا اضيفت اشياء متساوية الى اشياء متساوية تكون المجموعات متساوية
- ٢ اذا طُرِحَت اشياء متساوية من اشياء متساوية تكون البقايا متساوية
- ٣ اذا ضُرِبَت اشياء متساوية في اشياء متساوية تكون الحواصل متساوية
- ٤ اذا قُسِمَت اشياء متساوية على اشياء متساوية تكون الخواارج متساوية

- ٥ اذا اضيفت كمية الى اخرى وطُرِحَتْ منها فالثانية لا تتغير
- ٦ اذا ضُرِبَتْ كمية في اخرى وانقسمت عليها لا تتغير
- ٧ اذا اضيفت اشياء متساوية الى اشياء غير متساوية يكون من الاعظم المجموع الاعظم
- ٨ اذا طُرِحَتْ اشياء متساوية من اشياء غير متساوية يكون من الاعظم البقية العظمى
- ٩ اذا ضربت اشياء متساوية في اشياء غير متساوية يكون من الاعظم المحاصل الاعظم
- ١٠ اذا انقسمت اشياء غير متساوية على اشياء متساوية يكون من الاعظم الخارج الاعظم
- ١١ الاشياء المتساوية لشيء واحد هي متساوية بعضها البعض
- ١٢ الكل اعظم من جزؤه

الفصل الثاني

في الجمع

- ١٥ الجمع هو ربط كميات بواسطة علاماتها. فلو قيل ما هو مجموع ت وب ون لقيل ت + ب + ن ولو قيل اضع فضلا ب وس الى د لقيل ب - س + د ولو قيل اضع فضلا ب وس الى فضلا ن ود لقيل ب - س + ن - د وقس على ذلك
- ١٦ متى كانت الكميات متشابهة تُجمَع الى واحدة. مثالة ٢ ت + ٦ ب + ٤ ت + ٥ ب = ٧ ت + ١١ ب فلنا من ذلك القاعدة الاولى للجمع
- متى كانت الكميات متشابهة والعلامات متشابهة فاجمع المسميات واكتب عن يسار المجموع الاحرف المشتركة واجعل له العلامة المشتركة. وهذه امثلة للعل

٧ ب + كى	٣ كى	ب س
٨ ب + ٢ كى	٧ كى	٢ ب س
٢ ب + ٢ كى	كى	٩ ب س
٦ ب + ٥ كى	٢ كى	٣ ب س
<u>٢٢ ب + ١١ كى</u>	<u> </u>	<u>١٥ ب س</u>

س د كى + ٢ م	رى + ٢ ت ب ح
٢ س د كى + م	٢ رى + ت ب ح
٥ س د كى + ٧ م	٦ رى + ٤ ت ب ح
٧ س د كى + ٨ م	٢ رى + ت ب ح
<u>١٥ س د كى + ١٩ م</u>	<u> </u>

وهكذا اذا كانت العلامات سلبية. مثالة

٢ ت ب - م	- ن ك	٢ ب س -
- ت ب - ٢ م	- ٣ ن ك	- ب س
- ٧ ت ب - ٨ م	- ٢ ن ك	- ٥ ب س
<u>- ١٠ ت ب - ١٢ م</u>	<u> </u>	<u>- ٩ ب س</u>

١٧ لوقيل ما هو مجموع ٦ ب وفضلة ت و ٤ ب ل قيل ت - ٤ ب + ٦ ب اي يسقط ٤ ب من ت ثم يضاف الى الفضلة ٦ ب وذلك كاضافة ٢ ب الى ت ولوقيل ما هو مجموع ٧ ب و - ٢ ب ل قيل ٧ ب - ٢ ب اي ٥ ب فلنا من ذلك هذه

القاعدة الثانية للجمع. وهي متى كانت الكميات متشابهة والعلامات غير متشابهة فاطرح المسمى الاصغر من الاكبر واكتب عن يسار الباقي الاحرف المشتركة واجعل له علامة المسمى الاكبر. وهذه صورة العمل

$٢ح٢$	$٥ب س$	$٤+ ب$	$٦+ ب$
$٢ح٩-$	$٧ب س-$	$٦- ب$	$٤- ب$
$٢ح٧-$	$٢ب س-$		$٢+ ب$

$٢ح - دك$	$٦+ دى م$
$٥ح + ٤دك$	$٤دى - م$
	$٣دى + ٥م$

١٨ الكيتان المتساويتان اذا كانت احدهما ايجابية والاخرى سلبية تُفني احدهما الاخرى. مثالة

$$٦+ ب - ٦ب = ٠ \text{ و } ٢ \times ٦ - ١٨ = ٠$$

لفرض كيتين اكبرها ت واصغرهما ب فيكون مجموعهما ت + ب وفضلتها ت - ب ومجموع مجموعهما وفضلتها ت + ب اي ٢ ت ولنا من ذلك هذه القضية العابة اي

ان جمع مجموع كيتين الى فضلتهما يكون المجموع مضاعف اكبرها

١٩ ان اريد جمع عك من الكيات المتشابهة وكان بعضها ايجابيا وبعضها سلبيا فاجمع اولاً الايجابية ثم السلبية حسب القاعدة الاولى (١٦) ثم افعل في المجموعين حسب القاعدة الثانية (١٧) فلو قيل اجمع ١٢ ب + ٦ ب + ب - ٤ ب - ٥ ب - ٧ ب لقبل

$$\begin{aligned} ١٢ ب + ٦ ب + ب &= ٢٠ ب \\ - ٤ ب - ٥ ب - ٧ ب &= - ١٦ ب \\ \hline \text{وحسب القاعدة الثانية يكون المجموع} &= ٤ ب \end{aligned}$$

ولو قيل اجمع ٢ كى - كى + ٢ كى - ٧ كى + ٤ كى - ٩ كى + ٧ كى - ٦ كى لقبل

اجمع ٧ ت د - ح + ٨ ك ي - ت د + ٥ ت د + ح - ٧ ك ي
 اجمع ٢ ت ب - ٢ ت ي + ك + ت ب - ت ي + ب ك - ح
 اجمع ٢ ب ي - ٢ ت ك + ٢ ت + ٢ ب ك - ب ي + ت



الفصل الثالث

في الطرح

٢١ الطرح اسقاط كمية من اخرى ليعرف الفضل بينهما
 فلنفرض كمية ت + ب

اطرح منها + ب فيكون الباقي ت

اضف اليها - ب فتصير ت + ب - ب

وبالاولية الخامسة ت + ب - ب يعدل ت

اي طرح كمية ايجابية من عبارة جبرية هو كاضافة سلبية تعادل المطروحة اليها
 ولو فرض ت - ب

فان طرح منها - ب بقي ت

وان اضيف اليها + ب صارت ت - ب + ب

ولكن ت - ب + ب يعدل ت

اي طرح كمية سلبية هو كاضافة ايجابية تعادلها. فان كان على احد دين فرفعه
 عنه فهو بمثابة اضافة مبلغ الدين الى راس المال. ونرى من الامثلة المتقدمة ان
 طرح كمية ايجابية انما يتم بتغيير علامتها. فلنا من ذلك هذه القاعدة للطرح

ابدل علامات الكميات المطروحة من + الى - او عكسه ثم افعل

كما تقدم في الجمع. وهذه امثلة للعمل مع مشابهة العلامات اصلاً

من + ٢٨	ب ١٦	د ١٤	- ٢٨	- ١٦ ب	- ١٤ د
اطرح + ١٦	ب ١٢	د ٦	- ١٦	- ١٢ ب	- ٦ د
١٢ +	٤ ب	٨ د	- ١٢	- ٤ ب	- ٨ د

ففي هذه الامثلة قد يتوهم تبديل العلامات الاليجائية الى سلبية وبالعكس
٢٢ وهكذا متى نشابهت العلامات وكان المطروح اكبر من المطروح منه.

مثالة

$$\begin{array}{r} \text{من} \quad +16 \text{ ب} \quad +12 \text{ ب} \quad 6 \text{ دت} \quad -16 \quad -12 \text{ ب} \quad -6 \text{ دت} \\ \hline \text{اطرح} \quad +28 \text{ ب} \quad +16 \text{ ب} \quad 14 \text{ دت} \quad -28 \quad -16 \text{ ب} \quad -14 \text{ دت} \\ \hline \quad \quad \quad -12 \text{ ب} \quad -4 \text{ ب} \quad -8 \text{ دت} \quad +12 \quad +4 \text{ ب} \quad +8 \text{ دت} \end{array}$$

وهكذا متى اختلفت العلامات. مثالة

$$\begin{array}{r} \text{من} \quad +28 \text{ ب} \quad +16 \text{ ب} \quad +14 \text{ دت} \quad -28 \quad -16 \text{ ب} \quad -14 \text{ دت} \\ \hline \text{اطرح} \quad -16 \text{ ب} \quad -12 \text{ ب} \quad -6 \text{ دت} \quad +16 \quad +12 \text{ ب} \quad +6 \text{ دت} \\ \hline \quad \quad \quad +44 \text{ ب} \quad +28 \text{ ب} \quad +20 \text{ دت} \quad -44 \quad -28 \text{ ب} \quad -20 \text{ دت} \end{array}$$

٢٣ امتحان الطرح في الجبر كما في الحساب يكون باضافة الباقي الى المطروح.
فان وافق المجموع المطروح منه كان العمل صحيحاً والا فهو فاسد
تنبيه. عند الامتحان يجب اعادة العلامات الى اصلها. امثلة

$$\begin{array}{r} \text{من} \quad 2 \text{ كى} - 1 \\ \hline \text{اطرح} \quad - \text{كى} + 7 \\ \hline \quad \quad \quad 3 \text{ كى} - 8 \\ \hline \text{ح} + 2 \text{ ب ك} \quad \text{ح} - 5 \text{ ح} \\ \hline \text{ح} - 9 \text{ ب ك} \quad \text{ح} - 6 \text{ ح} \\ \hline \quad \quad \quad -4 \text{ ح} + 5 \text{ ح} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{من} \quad \text{ن د} - 7 \text{ بى} \quad 2 \text{ ت ب م} - \text{كى} \quad -17 + 4 \text{ ت ك} \\ \hline \text{اطرح} \quad \text{ن د} - \text{بى} \quad 7 \text{ ت ب م} + 6 \text{ كى} \quad -20 - \text{ت ك} \\ \hline \quad \quad \quad 10 \text{ ت ب م} - 7 \text{ كى} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{من} \quad \text{ت ك} + 7 \text{ ب} \quad 2 \text{ ت ح} + \text{ت كى} \\ \hline \text{اطرح} \quad -4 \text{ ت ك} + 10 \text{ ب} \quad -7 \text{ ت ح} + \text{ت كى} \\ \hline \quad \quad \quad 5 \text{ ت ك} - 8 \text{ ب} \end{array}$$

٢٤ متى فرضت عن كميات متشابهة يجب جمعها أولاً ثم طرحها. مثلاً
لوقيل من ت ب اطرح ٢ ت م + ت م + ٧ ت م + ٢ ت م + ٦ ت م لوقيل
ت ب - ١٩ ت م. ولوقيل من ي اطرح - ت - ت - ت - ت - ت لوقيل ي
+ ت + ت + ت + ت = ي + ٤ ت. ولوقيل من ت ك - ب س + ٢ ت
ك + ٧ ب س اطرح ٤ ب س - ٢ ت ك + ب س + ٤ ت ك فالجواب ٢
ك + ب س

من ت د + ٢ د س - ب ك اطرح ٢ ت د + ٧ ب ك - د س + ت د
٢٥ متى كانت الكميات غير متشابهة نطرح بكتابها على التوالي بعد تبديل
علاماتها. فلو قيل من ٢ ت ب + ٨ - م ي + د ح اطرح ك - در + ٤ ح ي
- ب م ك لوقيل ٢ ت ب + ٨ - م ي + د ح - ك - در - ٤ ح ي + ب م ك
٢٦ اذا وضعت علامة الطرح قدام كميات محصورة بين قوسين يجب عند
رفع القوسين تبديل علامات جميع الكميات المنخفضة. فلو وضع ت - (ب - س
+ د) كان المراد ان ب - و - س + د يجب طرحها جميعاً من ت. ويتم العمل
برفع القوسين وتبديل العلامات فتصير ت - ب + س - د وهكذا

١٢ ت د + ك ي + د - (٧ ت د - ك ي + د + ح م - ر ي) = ٦ ت
د + ٢ ك ي - ح م + ر ي
٧ ت ب س - ٨ + ٧ ك - (٢ ت ب س - ٨ - د ك + ر) = ٤ ت
ب س + ٧ ك + د ك - ر
٢ ت د + ح - ٢ ي - (٧ ي + ٢ ح - م ك + ٤ ت د - ح ي - ت
= (د

٦ ت م - د ي + ٨ - (١٦ د ي + ٢ د ي - ٨ - ت م - ي ر) =
٧ ك ي - ٢ ك + ٥ - (٤ ح - ت ي + ك + ٢ ب) =
وبالعكس متى اريد انحصار كميات بين قوسين. مثلاً - م + ب - د ك +
٢ ح فاذا انحصرت للطرح نصير - (م - ب + د ك - ٢ ح)



في الضرب

٢٨ لو فرض ان يُضرب ت في ب وفرضت للباء قيمة ثلاثة مثلاً لا فتضی
اخذت ثلاث مرات ای ت + ت + ت = ٣ ت اوب ت فتزی ان الاحرف
تُضرب بكتابها متوالية بتوسط علامة الضرب اوب دونها. فيكون ب في س ب ×
س اوب س وهكذا مها تكاثرت الاحرف. ولا فرق في ترتيبها لان س د م = د م
س = م د س كما ان ٢ × ٢ × ٤ = ٢ × ٤ × ٢ = ٤ × ٢ × ٢ وان كان
للحرف مسميات عددية يجب ضربها ايضاً ثم بوضع حاصلها قدام حاصل الاحرف.
مثالة ٢ ب × ٢ ب = ٦ ب ب

۲ح د	۱۲ح ی	ا ضرب ۹ تب
م ی	۲ رك	في ۲ ك ی
<hr/>	<hr/>	<hr/>
۲ح د م ی		۲۷ تب ت ك ی

اضرب ٢ ت د
في ١٢ ح م ع
—————
٢ ب د ح
ك
—————
٧ ب ح د ك

٢ ت ي
٨ م ك
—————

حى	٢٦	اضرب ٢ تب
٢٤	ك٢	٤ في
<hr/>	<hr/>	<hr/>
حى٢٤	ك٧٢	١٢ تب

٢٩ اذا كان المضروب كمية مركبة يجب ضرب كل جزء منه في المضروب فيه. مثالة

$\begin{array}{r} ٢ح + م \\ \underline{٦ د ي} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{اضرب } د + ٢ ك ي \\ \text{في } ٢ ب \\ \hline ٢ ب د + ٦ ب ك ي \end{array}$
$\begin{array}{r} ٢ح م + ٢ + در \\ \underline{٤ ب} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{اضرب } ٢ ح ل + ١ \\ \text{في } م ي \\ \hline ٢ ح ل م ي + م ي \end{array}$

٣٠ اذا كان كل واحد من المضروب والمضروب فيه كمية مركبة يجب ضرب كل جزء من الواحد في كل جزء من الاخر. مثالة

$\begin{array}{r} ٤ ت ي + ٢ ب \\ \underline{٢ س + رك} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{اضرب } ٢ ك + د \\ \text{في } ٢ ح + م \\ \hline ٦ ت ك + ٢ ت د + ٢ ح ك م + ح د م \end{array}$
$\begin{array}{r} \text{اضرب } ت + ١ \\ \text{في } ٢ ك + ٤ \\ \hline ٢ ت ك + ٢ ك + ٤ ت + ٤ \end{array}$	

اضرب $٢ ح + ٧$ في $٦ د + ١$

الجواب $١٤ د ح + ٢ د + ٢ ح + ٧$

اضرب $د ي + رك + ح$ في $٦ م + ٤ + ٧ ي$

اضرب $٧ + ٦ ب + ت د$ في $٢ ر + ٤ + ٢ ح$

اذا كان في الحاصل كميات متشابهة يجب كتابتها بعضها تحت بعض ثم جمعها

وهذه صورة العمل

$$\begin{array}{r}
 \text{اضرب ب} + \text{ت} \\
 \text{في} \quad \text{ب} + \text{ت} \\
 \hline
 \text{ب ب} + \text{ب ت} \\
 + \quad \text{ب ت} + \text{ت ت} \\
 \hline
 \text{ب ب} + \text{ب ت} + \text{ت ت}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{اضرب ب} + \text{س} + \text{ك} \\
 \text{في} \quad \text{ب} + \text{س} + \text{ك} \\
 \hline
 \text{ب ب} + \text{ب س} + \text{ب ك} \\
 + \quad \text{ب س} + \text{ب ك} + \text{س س} + \text{س ك} + \text{ك ك} \\
 \hline
 \text{ب ب} + \text{ب س} + \text{ب ك} + \text{س س} + \text{س ك} + \text{ك ك}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{اضرب ت} + \text{ي} + \text{ا} \text{ في } \text{ب} + \text{ك} + \text{د} \\
 \text{اضرب } \text{ت} + \text{د} + \text{ا} \text{ في } \text{ب} + \text{ك} + \text{د} \\
 \text{اضرب ب} + \text{س} + \text{د} \text{ في } \text{ب} + \text{ك} + \text{د} \\
 \text{اضرب } \text{ب} + \text{ك} + \text{ا} \text{ في } \text{ب} + \text{ك} + \text{د} \\
 \text{اضرب } \text{ت} + \text{ب} + \text{ك} \text{ في } \text{ب} + \text{ك} + \text{د} \\
 \text{اضرب } \text{ب} + \text{ك} + \text{د} \text{ في } \text{ب} + \text{ك} + \text{د}
 \end{array}$$

الجواب ٤٨ ب د ك + ٢٤ ب د

٣١ لا يخفى انه اذا ضرب ٤ × ت يكون ٤ ت واذا ضرب ٤ × - ت يجب تكرار - ت اربع مرات. او - ت - ت - ت - ت = - ٤ ت واذا ضرب - ٤ × + ت يكون الحاصل + ت + ت + ت + ت = + ٤ ت ولكن العلامة السلبية للاربعة تدل على وجوب الطرح وذلك يتم بتبديل العلامة فتصير - ٤ ت واذا ضرب - ٤ × - ت يكون الحاصل - ت - ت - ت - ت = - ٤ ت ولكن يجب تبديل العلامة فتصير + ٤ ت ولنا من ذلك انه

ان ضرب + في + يكون الحاصل +
 وان ضرب - في - يكون الحاصل +
 وان ضرب + في - يكون الحاصل -
 وان ضرب - في + يكون الحاصل -

ايه متى تشابهت علامات المضروب والمضروب فيه تكون
 علامة الحاصل ايجابية. ومتى اختلفت تكون علامته سلبية

$$\begin{array}{r} \text{اضرب ب-} ٢ \text{ ت} \\ \text{في} \quad ٦ \text{ ي} \\ \hline ٦ \text{ ب ي} - ١٨ \text{ ت ي} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{اضرب ج-} ٢ \text{ د-} ٤ \\ \text{في} \quad ٢ \text{ ي} \\ \hline ٢ \text{ ج ي} - ٨ \text{ د ي} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{اضرب ت+} \\ \text{في} \quad \text{ب- ك} \\ \hline \text{ب ت+ ب ب- ت ك- ب ك} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{اضرب} ٢ \text{ ح+} ٢ \\ \text{في} \quad \text{ت د-} ٦ \\ \hline ٢ \text{ ح د+} ٢ \text{ ت د-} ١٨ \text{ ح-} ١٨ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{اضرب ت-} ٤ \text{ في} ٢ \text{ ب-} ٦ = ٢^* \text{ ت ب-} ١٢ \text{ ب-} ٦ \text{ ت+} ٢٤ \\ \text{اضرب} ٢ \text{ ت ي-} \text{ب في} ٦ \text{ ك-} ١ = ١٨ \text{ ت ك ي-} ٦ \text{ ب ك-} ٢ \\ \text{ت ي+ ب} \end{array}$$

$$\text{اضرب} ٢ \text{ د-} \text{ح ي-} ٢ \text{ ك في} ٤ \text{ ب-} ٧$$

اضرب ٢ ث د - ت ح - ٧ في ٤ - د ي - ح ر
اضرب ٢ ح ي + ٢ م - ١ في ٤ د - ٢ ك + ٢

٢٢ قد راينا ان حاصل كمتين سلبيتين ايجائيتان. فان ضرب هذا الحاصل في كمية سلبية يكون الحاصل سلبيا. وان ضرب الحاصل الاخير في كمية سلبية يكون الحاصل ايجائيا. وعلى الاطلاق ان كان عدد الكميات السلبيات وترا يكون الحاصل سلبيا. وان كان شفعا يكون الحاصل ايجائيا. اما الكميات الايجائية فخواصلها ايجائية ابدا

٢٣ قد يحدث في الضرب ان الكميات الايجائية والسلبية يفي بعضها بعضا حتى تخرج من الحاصل بالكلية مثالة

اضرب ت - ب
في
٢ م + ي
٢ م - ي
ت ت - ت ب

+ ت ب - ب ب
ت ت - ب ب

اضرب ت ت + ت ب + ب ب
في
ت - ب

ت ت ت + ت ت ب + ت ب ب
- ت ت ب - ت ب ب - ب ب ب
ت ت ت - ب ب ب

٢٤ بكفي احيانا الدلالة على الضرب بعلامته من دون انما هو حقيقة. فلو قبل اضرب ت + ب + س في ج + م + ي لقبل (ت + ب + س) × (ج + م + ي)

٢٥ لنا ما تقدم ذكره هذه القاعدة العمومية للضرب

اضرب جميع احرف المضروب ومسمياتها في جميع احرف المضروب
فيه ومسمياتها واجعل لكل جزء من الحاصل العلامة المطلوبة على
القاعدة السابقة ان العلامات المتشابهة يحصل منها ايجاب والمختلفة
يحصل منها سلب. مثاله

$$\begin{aligned} & \text{اضرب ت} + \text{ب} - \text{٢} \text{ في } \text{٤} - \text{ت} - \text{٦} - \text{ب} - \text{٤} \\ & \text{اضرب } \text{٤} - \text{ت} - \text{ب} \times \text{ك} \times \text{٢} \text{ في } \text{٢} \text{ في } \text{م} - \text{٢} - \text{ي} - \text{١} - \text{ح} \\ & \text{اضرب } (\text{٧} - \text{ت} - \text{ح} - \text{ي}) \times \text{٤} \text{ في } \text{٤} \times \text{ك} \times \text{٢} \times \text{٥} \times \text{د} \\ & \text{اضرب } (\text{٦} - \text{ت} - \text{ب} - \text{ح} - \text{د} - \text{١}) \times \text{٢} \text{ في } (\text{٨} + \text{٤} - \text{ك} - \text{١}) \times \text{د} \\ & \text{اضرب } \text{٢} - \text{ت} - \text{ي} + \text{٤} - \text{ح} \text{ في } (\text{د} + \text{ك}) \times (\text{ح} + \text{ي}) \\ & \text{اضرب } \text{٦} - \text{ت} - \text{ك} - (\text{٤} - \text{ح} - \text{د}) \text{ في } (\text{ب} + \text{١}) \times (\text{ح} + \text{١}) \\ & \text{اضرب } \text{٧} - \text{ت} - \text{ي} - \text{١} - \text{ح} \times (\text{د} - \text{ك}) \text{ في } - (\text{ر} + \text{٢} - \text{٤} - \text{م}) \end{aligned}$$



الفصل الخامس

في القسمة

٢٦ القسمة طريقة لاستخراج عدد من اخر اذا ضرب في المقسوم عليه يحصل
المقسوم. وقد يكون المقسوم والمقسوم عليه عددين وقد يكونان حروفا. فلو قسم
ب د على ت لكان الخارج ب د لان ب د \times ت = ت ب د

فنرى من ذلك انه متى وجد المقسوم عليه بين اجزاء المقسوم ثم
القسمة باخراج ذلك الجزء من الكمية. امثلة

اقسم س ك	د ح	د ر ك	ح م ي	د ح ك ي
على س	د	در	ح	دى
الخارج ك		ك		ح ك

اقسم ت ب س د	ت ب ك ي	ت ث ب
على ب	ت ك	ث
الخارج ب ك	ب ي	ت ب

اقسم ب ب ك	ت ت د د ك	ت م م ي
على ب	ت د	ت م ي
الخارج ب ك	ت د د ك	

اقسم ت ت ك ك ح	ي ي ي
ت ت ك ك	ي ي
ت ك ح	

وعلى الاطلاق مهما كانت اجزاء المقسوم يكون اخراج احدها كالقسمة عليه. مثالة

اقسم ت (ب + د)	ت (ب + د)	(ن + م) ي
على ت	ب + د	ن + م
الخارج ب + د	ت	ي

اقسم (ب + ك) (س + د)	(ب + ي) × (د - ح) ك
على ب + ك	د - ح
س + د	(ب + ي) ك

٢٧ اذا كان للكميات مسميات عددية يجب ان تُقسم ايضاً ثم يجعل الخارج قدام الخارج من قسمة الاخرف. مثالة

اقسم ٦ ت ب	١٦ د ك ي	٢٥ د ح ر	١٢ ك ي
على ٢ ب	٤ د ك	د ح	٦
الخارج ٢ ت		٢٥ ر	

٢٠ ح ٢

٢

اقسم ٢٤ درك

على ٢٤

الخارج درك

٢٨ اذا ضربت كمية بسيطة في كمية مركبة تدخل البسيطة في كل جزء من المحاصل (٢٩) فيمكن فكها الى ضلعيه المضروب والمضروب فيه. مثالة

ت ب + ت د تنفك الى ت \times (ب + د)

ت ب + ت س + ت ح تنفك الى ت \times (ب + س + ح)

ت م ح + ت م ك + ت م ي تنفك الى ت م \times (ح + ك + ي)

٤ ت د + ٨ ت ح + ١٢ ت م + ٤ ت ي تنفك الى ٤ ت \times (د + ح + ٣ + ي)

٣ + ي

فان انقسمت الكمية على احد هذين الضلعين يكون الخارج الضلع الآخر. مثالة

(ت ب + ت د) + ت = ب + د و (ت ب + ت د) + (ب + د) = ت

ت ت ح + ت ي

ت

ت ح + ي

اقسم ب د ح + ب د ي

على ب د

الخارج

٦ ت ب + ١٢ ت س

٢ ت

٢ ب + ٤ س

اقسم درك + د ح + ك + د ي

على د ك

٢٥ د م + ١٤ د ك

٧ د

١٢ ح ك + ٨

٤

٣ ح ك + ٢

اقسم ١٠ دري + ١٦ د

على ٢ د

٥ ري + ٨

الخارج

ت م ح + ت م ك + ت م ي

ح + ك + ي

اقسم ت ب + ت س + ت ح

على ب + س + ح

الخارج ت

$$\begin{array}{r} \text{اقسم ٤ ت ب + ٨ ت ي} \\ \text{على ب + ٢ ي} \\ \hline \text{الخارج ٤ ت} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{ت ح م + ت ح ي} \\ \text{م + ي} \\ \hline \end{array}$$

٢٩ اذا كان كل من المقسوم والمقسوم عليه ايجابياً او سلبياً يكون الخارج ايجابياً. وان كان احدهما ايجابياً والاخر سلبياً يكون الخارج سلبياً. وذلك واضح مما نقدم ان حاصل الخارج في المقسوم عليه هو المقسوم نفسه (٢٦) فيكون

$$\begin{array}{l} \text{ت ب + ب = ت لان ت} \times \text{ب = ت ب} \\ \text{و- ت ب + ب = - ت لان - ت} \times \text{ب = - ت ب} \end{array}$$

وقس على ذلك

$$\begin{array}{r} \text{اقسم ت ب ك} \\ \text{على - ت} \\ \hline \text{الخارج - ب ك} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{٨ ت - ١٠ ت ي} \\ \text{٢ ت -} \\ \hline \text{٤ - ٥ + ي} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{٣ ت ك - ٦ ت ي} \\ \text{٢ ت} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{اقسم ٦ ت م} \times \text{د ح} \\ \text{على - ٢ ت} \\ \hline \text{٢ - م} \times \text{د ح} = ٢ د ح م \end{array}$$

٤٠ اذا لم توجد احرف المقسوم عليه في المقسوم يُدَلَّ على القسمة بكتابتهما على هيئة كسر دارجي. مثاله ك ي ÷ ت = $\frac{\text{ك ي}}{\text{ت}}$ ود - ك ÷ ح = $\frac{\text{د - ك}}{\text{ح}}$ وان كان المقسوم كمية مركبة يوضع المقسوم عليه تحته جميعاً مرة واحدة او يكرر تحت كل جزء منه. مثاله ب ÷ س + ك = $\frac{\text{ب + س}}{\text{ك}}$ او $\frac{\text{ب}}{\text{ك}} + \frac{\text{س}}{\text{ك}}$ وت ÷ ب + ٢ = $\frac{\text{ت + ب}}{\text{ب}}$ او $\frac{\text{ت}}{\text{ب}} + \frac{\text{ب}}{\text{ب}}$ لان نصف مجموع كيتين او اكثر يعدل مجموع انصافها. وكذلك ت - ب ÷ ٢ = $\frac{\text{ت - ب}}{\text{٢}}$ او $\frac{\text{ت}}{\text{٢}} - \frac{\text{ب}}{\text{٢}}$ لان نصف فضلة كيتين يعدل فضلة نصفهما. وهكذا $\frac{\text{ت - ٢ ب + ح}}{\text{م}} = \frac{\text{ت}}{\text{م}} - \frac{\text{٢ ب}}{\text{م}} + \frac{\text{ح}}{\text{م}}$ وفس على ذلك

٤١ اذا وجد حروف مشتركة في المقسوم والمقسوم عليه نظرح منها. مثاله

ث ب = ت د ح ك = ح ك و ت ح ٢ - ح ٢ = ح ٢ - ح ٢ و ب

وجد المقسوم عليه في بعض اجزاء المقسوم دون البعض نُقَسَمَ الأول كما تقدم وتكتب

الأخر على هيئة كسرية كما علمت. مثاله (ت ب + د) + ت = $\frac{ت ب + د}{ت} = \frac{ت ب}{ت} + \frac{د}{ت}$

$$\frac{d}{n} + b = \frac{d}{n} +$$

آت ح + ت د + ك
ت

اقسم دك ی + رك - ح د
على ك

الخارج د ي + ر - $\frac{ح}{ك}$

$$\begin{array}{r} 2m + 2 \\ 2m \end{array}$$

افسم ب م + ۲ ی
علی - ب

المخارج - م + $\frac{٢}{٥}$

٤٢ المخرج من قسمه كميّة على ذاتها هو واحدٌ ابدأ. مثاله

$$1 = \frac{7}{2+4} \text{ و } 1 = \frac{2 \text{ ن ك}}{2 \text{ ن ك}} \text{ و } 1 = \frac{\text{ن}}{\text{ن}}$$

افسم ت ك + ك ۲ ب د - ۲ د ۴ ت ك ی - ۴ ت + ۸ ت د
 علی ك ۴ ت

الخارج ت ١ + كى - ١ + ٢ د

افسم ۱۲ ث ب ی + ۶ ت ب ک - ۱۸ ب ب م + ۲۴ ب علی ۶ ب

اقسم ۱۶ ت - ۱۲ + ۸ ی + ۴ - ۲۰ ت د ک + م علی ۴

اقسم (ت - ح^۲) × (م + ی) × ك علی (ت - ح^۲) × (م + ی)

افسم ت ح د - ٤ ت د + ٢ ت ی - ت علی ح د - ٤ د + ٢ ی - ١

اقسم ت ك - ری + ت د - ۴ م ی - ۶ ت علی - ت

قسم ت م ی + ۲ م ی - م ك ی + ت م - د علی - د م ی

٤٧ ان قيمة $\frac{ت}{ب}$ هي ت وقيمة $\frac{ب}{ب}$ هي - ت وى $+\frac{ت}{ب} = -\frac{ب}{ب}$ فنرى ان قيمة الكسر تتغير من + الى - وبالعكس بتبديل العلامة المتقدمة على الكسر كله
 حسباً تقدم (٢٩) $\frac{ت}{ب} = + ت و \frac{ت}{ب} = - ت و \frac{ت}{ب} = - ت و \frac{ت}{ب} = + ت و$
 $+= ت - س ولكن \frac{ت}{ب} = \frac{ت + ب}{ب} = - ت + س$
 فنرى ان قيمة الكسر تتغير من + الى - وعكسه بتبديل جميع علامات الصورة.
 اذا تغيرت علامات المخرج فلنا ايضاً كما تقدم $\frac{ت}{ب} = + ت و \frac{ت}{ب} = - ت و$
 - ت

فلنا مما تقدم هذه القضية العامة ان قيمة الكسر تتغير من + الى - او عكسه بتبديل العلامة المتقدمة على الكسر او بتبديل جميع علامات الصورة او جميع علامات المخرج

ثم ان $\frac{ت}{ب} = + ت و \frac{ت}{ب} = - ت و \frac{ت}{ب} = + ت و \frac{ت}{ب} = - ت و$ اي اذا تغيرت
 العلامات من + الى - او عكس ذلك في موضعين من المواضع المذكورة سابقاً لا
 تتغير قيمة الكسر. وان تغيرت العلامات في المواضع الثلاثة تتغير القيمة. وذلك
 حسباً تقدم في (٢٢) و (٢٩) مثاله $\frac{٦}{٣} = \frac{٦}{٣} = \frac{٦}{٣} = \frac{٦}{٣}$ و (٢٩) $\frac{٦}{٣} = \frac{٦}{٣} = \frac{٦}{٣} = \frac{٦}{٣}$
 ولنا من ذلك طرق مختلفة لكتابة الخارج. مثلاً (ت - س) + ب =
 $\frac{ت}{ب} + \frac{س}{ب} = \frac{ت + س}{ب}$ والاخيرة هي الاكثر استعمالاً

نبذة في الاختزال والتجسس

٤٨ الكسر مجتزئ اي يُحطُّ بقسمة الصورة والمخرج كليهما على كمية نعدّها. مثاله
 $\frac{ت}{ب} = \frac{٢٧}{٢٢} = \frac{٢٧}{٢٢} = \frac{٢٧}{٢٢}$ وهكذا $\frac{١}{٢} = \frac{٢٧}{٢٢} = \frac{٢٧}{٢٢}$ و (٢٨) $\frac{١}{٢} = \frac{٢٧}{٢٢} = \frac{٢٧}{٢٢}$

اذا وجد حرفاً ما في كل جزء من الصورة والمخرج يمكن اخراجه من الجميع
(٢٨) مثالة

$$\frac{٢ت + ٢د}{٢د + ٢ح} = \frac{٢٢ + ٢ي}{٢د + ٢ح} = \frac{٢د + ٢ي}{٢د + ٢ح} = \frac{٢ + ٢}{٢ + ٢}$$

٤٩ الكسور نقول الى مخرج مشترك بضرب كل صورة في جميع الخارج الا
مخرجها لايجاد صورة جديدة والخارج جميعاً بعضها في بعض لايجاد المخرج المشترك.
وهذا العمل يقال له التجنيس. ولا تتغير بذلك قيمة الكسر لان الصورة والمخرج
بضربان في كمية واحدة (٤٦)

$$\begin{aligned} & \text{فلوفيل جنس } \frac{٢}{د} \frac{٢}{س} \frac{٢}{ب} \text{ ثقليل } \frac{٢}{د} \frac{٢}{ب} \frac{٢}{س} \text{ وب } \frac{٢}{د} \frac{٢}{ب} \frac{٢}{س} \\ & \text{جنس } \frac{٢}{د} \frac{٢}{س} \frac{٢}{ب} \text{ جنس } \frac{٢}{د} \frac{٢}{س} \frac{٢}{ب} \\ & \text{جنس } \frac{٢}{د} \frac{٢}{س} \frac{٢}{ب} \text{ جنس } \frac{٢}{د} \frac{٢}{س} \frac{٢}{ب} \\ & \text{جنس } \frac{٢}{د} \frac{٢}{س} \frac{٢}{ب} \text{ جنس } \frac{٢}{د} \frac{٢}{س} \frac{٢}{ب} \end{aligned}$$

ثم بعد التجنيس نختزل الكسور ان كان ذلك ممكناً

٥٠ الكمية المختلطة من صحيح وكسر نقول الى كسر غير حقيقي بان نجعل
للصحيح مخرجاً هو واحد. ثم تفعل كما تقدم. مثالة $\frac{٢}{د} \frac{٢}{س} \frac{٢}{ب}$ فيقال $\frac{٢}{د} \frac{٢}{س} \frac{٢}{ب}$ ثم $\frac{٢}{د} \frac{٢}{س} \frac{٢}{ب}$
وكذلك $\frac{٢}{د} \frac{٢}{س} \frac{٢}{ب}$ وب $\frac{٢}{د} \frac{٢}{س} \frac{٢}{ب}$ فتصير $\frac{٢}{د} \frac{٢}{س} \frac{٢}{ب}$ $\frac{٢}{د} \frac{٢}{س} \frac{٢}{ب}$ $\frac{٢}{د} \frac{٢}{س} \frac{٢}{ب}$
والكسر الغير الحقيقي بالعكس نقول الى كمية مختلطة بقسمة الصورة على المخرج

$$\text{مثالة } \frac{٢ + ٢ + ٢}{ب} = \frac{٢ + ٢ + ٢}{ب}$$

$$\text{حوّل } \frac{٢ - ٢ + ٢ + ٢}{ب} = \frac{٢ - ٢ + ٢ + ٢}{ب}$$

نبذة في جمع الكسور

٥١ تجمع الكسور بكتابتها على التوالي مع علاماتها حسبما تقدم في جمع الصحيح
او بنحوها الى مخرج مشترك. ثم نجعل جميع العلامات المتقدمة عليها ايجابية. ثم تجمع
الصور وبوضع المجمع فوق المخرج المشترك

تنبيه عند تبديل العلامات يجب الاحتراس من تغيير قيمة الكسر (٤٧)

$$\frac{\text{ت} + \text{د} + \text{ب} + \text{س}}{\text{ب}} \text{ فلو قيل اجمع } \frac{\text{ت}}{\text{د}} \text{ ود } \frac{\text{س}}{\text{ب}} \text{ لقبل}$$

$$\text{اجمع } \frac{\text{د}}{\text{د}} \text{ و } \frac{\text{ر} + \text{د}}{\text{ح}^2} \text{ الجواب } \frac{\text{د}^2 - \text{د}^2 - \text{د}^2 - \text{د}^2}{\text{ح}^2}$$

$$\text{اجمع } \frac{\text{ت}}{\text{د}} \text{ و } \frac{\text{ب} - \text{د}}{\text{س}} \text{ الجواب } \frac{\text{ت} - \text{ب} + \text{د} + \text{د}}{\text{س}}$$

$$\text{اجمع } \frac{\text{ت}}{\text{س}} \text{ و } \frac{\text{د}}{\text{م}} \text{ الجواب } \frac{\text{ت} + \text{د} + \text{د} + \text{د}}{\text{م}} \text{ او } \frac{\text{ت} - \text{د}}{\text{م}}$$

$$\text{اجمع } \frac{\text{ت}}{\text{ب} + \text{ب}} \text{ و } \frac{\text{ب}}{\text{ب} - \text{ب}} \text{ الجواب } \frac{\text{ت} + \text{ت} + \text{ب} + \text{ب}}{\text{ب} - \text{ب}}$$

$$\text{اجمع } \frac{\text{ت}}{\text{د}} \text{ و } \frac{\text{ح} - \text{د}}{\text{ر} - \text{د}}$$

$$\text{اجمع } \frac{\text{د}}{\text{ر}} \text{ و } \frac{\text{د} - \text{د}}{\text{ر} - \text{د}} \text{ الجواب } \frac{\text{د} - \text{د}}{\text{ر} - \text{د}}$$

$$\text{اجمع } \frac{\text{ت}}{\text{م}} \text{ و } \frac{\text{ب} + \text{د}}{\text{م}} \text{ الجواب } \frac{\text{ت} + \text{ب} + \text{د} + \text{د}}{\text{م}}$$

$$\text{اجمع } \frac{\text{د}^2}{\text{د} - \text{م}} \text{ و } \frac{\text{د} + \text{ح}}{\text{س}} \text{ الجواب } \frac{\text{د}^2 - \text{د}^2 - \text{د}^2 - \text{د}^2}{\text{س} - \text{م}}$$

$$\text{حوّل } \frac{\text{ت}}{\text{ب}} + \frac{\text{ب}}{\text{ب}} \text{ الى كسر غير حقيقي الجواب } \frac{\text{ت} + \text{ب} + \text{ب}}{\text{ب}}$$

$$\text{حوّل } \frac{\text{م}}{\text{د}} + \frac{\text{د}}{\text{ح} - \text{د}} \text{ الجواب } \frac{\text{م} - \text{د} + \text{د} + \text{د} - \text{د} - \text{د}}{\text{ح} - \text{د}}$$

$$\text{حوّل } \frac{\text{د}}{\text{ب}} + \frac{\text{ب}}{\text{ب}} \text{ الجواب } \frac{\text{د} + \text{ب} + \text{ب}}{\text{ب}}$$

$$\text{حوّل } \frac{\text{ح}}{\text{م}} - \frac{\text{د}}{\text{س}} \text{ حوّل } \frac{\text{ب}}{\text{د} - \text{س}} + \frac{\text{س}}{\text{س}} \text{ حوّل } \frac{\text{د}^2 - \text{د}^2}{\text{س}^2} + \frac{\text{د}^2}{\text{س}^2}$$

نبذة في طرح الكسور

٥٢ تغيير لطح الكسور علامة المطروح من + الى - او عكسه

ثم يفعل كما تقدم في الجمع

تنبيه تارة يجب تغيير علامة الصورة ونارة علامة المتقدمة على الكسر كلو حتى

تكون هذه الاخيرة ايجابية

فلو قيل من $\frac{ب}{ب}$ اطرح $\frac{ج}{م}$ ثقل $\frac{ب}{ب} = \frac{ج}{م}$ ثم بالتحويل الى مخرج مشترك $\frac{ب}{ب} = \frac{ج}{م}$ وبالجمع $\frac{ج}{م} = \frac{ج}{م}$

من $\frac{ب}{ب}$ اطرح $\frac{ج}{م}$ الجواب $\frac{ج}{م}$

من $\frac{ب}{ب}$ اطرح $\frac{ج}{م}$ الجواب $\frac{ج}{م}$

من $\frac{ب}{ب}$ اطرح $\frac{ج}{م}$ الجواب $\frac{ج}{م}$

من $\frac{ب}{ب}$ اطرح $\frac{ج}{م}$ الجواب $\frac{ج}{م}$

من $\frac{ب}{ب}$ اطرح $\frac{ج}{م}$ الجواب $\frac{ج}{م}$

٥٢ نُطرح الكسور ايضاً مثل الصحيح بكتابتها متوالية بعد تبديل العلامة.

فلو قيل اطرح $\frac{ج}{م}$ من $\frac{ج}{م}$ ثقل $\frac{ج}{م} = \frac{ج}{م}$

اما طرح الكسر من صحيح او عكسه فهو بان نجعل للصحيح مخرجاً هو واحد ثم نفعل كما تقدم

من $\frac{ج}{م}$ اطرح $\frac{ج}{م}$ الجواب $\frac{ج}{م}$

من $\frac{ب}{ب}$ اطرح $\frac{ج}{م}$ الجواب $\frac{ج}{م}$

من $\frac{ب}{ب}$ اطرح $\frac{ج}{م}$ الجواب $\frac{ج}{م}$

من $\frac{ب}{ب}$ اطرح $\frac{ج}{م}$ الجواب $\frac{ج}{م}$

نبذة في ضرب الكسور

٥٤ ضرب الكسور في الجبر كما في الحساب اي تضرب الصور بعضها في

بعض لايجاد صورة جديدة. والمخرج بعضهما في بعض لايجاد مخرج جديد. مثاله

$$\frac{ب}{س} \times \frac{د}{م} = \frac{ب د}{س م} \quad \frac{ج}{م} \times \frac{د}{س} = \frac{ج د}{م س}$$

$$\text{اضرب } \frac{ح \times (٢ + ت)}{٢} \text{ في } \frac{٤}{(ت - ن)} \text{ الجواب } \frac{ح \times (٢ + ت)}{(ن - ت) \times ٢}$$

$$\text{اضرب } \frac{ت + ح}{٢ + د} \text{ في } \frac{٢ - ٤}{س + ي}$$

$$\text{اضرب } \frac{١}{٢ + ر} \text{ في } \frac{٢}{٨} \text{ اضرب } \frac{٢}{م} \text{ في } \frac{٢ - ح}{ي} \text{ في } \frac{د}{س} \text{ في } \frac{١}{١ - س}$$

$$\text{اضرب } \frac{٢ + ن}{ن} \text{ في } \frac{١}{ح} \text{ في } \frac{د}{٢ + ر}$$

$$\text{اضرب } \frac{ت}{ح} \text{ في } \frac{٦ - ت}{١ + د} \text{ في } \frac{٢}{٧}$$

٥٥. يُختصر الضرب بطرح الكميات المتساوية من الصور والمخرج فيستغنى

بذلك عن الاختزال بعد اتمام الضرب. مثالة لو قيل اضرب $\frac{ت}{ر}$ في $\frac{ح}{ت}$ في $\frac{د}{ي}$

فلنا ت في احدى الصور واحد المخرج. ولذلك نسقطها منها فيبقى $\frac{د}{ري}$

$$\text{اضرب } \frac{ت}{م} \text{ في } \frac{٢}{٣} \text{ في } \frac{ح}{د} \text{ الجواب } \frac{ت}{٦}$$

$$\text{اضرب } \frac{ت + د}{ي} \text{ في } \frac{٢}{ح} \text{ الجواب } \frac{ت + د}{٢ + ح}$$

$$\text{اضرب } \frac{ت + د}{ح} \text{ في } \frac{ح}{م} \text{ في } \frac{٢}{٥}$$

وهكذا في الكسر والصحيح بضرب الصحيح في صورة الكسر. مثالة $ت \times \frac{٢}{ي}$

$$= \frac{٢ ت}{ي}$$

$$\text{ور } \frac{ك}{د} \times \frac{١ + ح}{٣} = \frac{ح رك + رك}{د ٣}$$

$$\text{وت } \frac{١}{ب} \times \frac{ت}{ب} = \frac{ت}{ب}$$

٥٦. الكسر يُضرب في كمية مساوية لمخرجه برفع المخرج. مثالة $\frac{ت}{ب} \times ب = ت$

$$\text{ت وت } \frac{٢}{ي} \times (ت - ي) = م^٢ \text{ و } \frac{٢ + ح}{م + ٢} \times (م + ٢) = ح + د$$

وهكذا اذا ضرب في ضلع من اضلاع المخرج برفع ذلك الضلع. مثالة $\frac{ت}{ب}$

$$\times ي = \frac{ت}{ب} = ٦ \times \frac{ح}{٢٤} = \frac{ح}{٤}$$

٥٧ الكسر الاضافي هو كسر الكسر وهو الحاصل من ضرب كسرين او اكثر.
مثاله $\frac{٢}{٤} \times \frac{٢}{٤}$ اي ثلثة ارباع $\frac{٢}{٤} = \frac{٢}{٤} \times \frac{٢}{٤}$ فيقول الكسر الاضافي الى بسيط
بضرب الصور والمخارج حسبما تقدم

$$\text{حوّل } \frac{٢}{٧} \times \frac{٢}{٣} \text{ الى كسر بسيط } \frac{٢}{١٤} \text{ الجواب } \frac{٢}{١٤}$$

$$\text{حوّل } \frac{٢}{٣} \times \frac{٤}{٥} \text{ الى كسر بسيط } \frac{٨}{١٥} \text{ الجواب } \frac{٨}{١٥}$$

$$\text{حوّل } \frac{١}{٧} \times \frac{١}{٨} \text{ الى كسر بسيط } \frac{١}{٥٦} \text{ الجواب } \frac{١}{٥٦}$$

فترى ان $\frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٤} = \frac{٢}{٦}$ و $\frac{١}{٥} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{١٥}$ و $\frac{٤}{٧} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٨}{٢١}$ وقس
على ذلك

نبذة في قسمة الكسور

٥٨ لقسمة الكسور يُقَلَّبُ المقسوم عليه بان تجعل صورته مخرجاً
ومخرجه صورة ثم يفعل كما في الضرب

فلو قيل اقسام $\frac{٢}{٣}$ على $\frac{٢}{٤}$ لقيل $\frac{٢}{٣} \times \frac{٤}{٢} = \frac{٨}{٦}$ وكنية هذه
القاعدة هي انه اذا ضرب كسر في ذاته بعد قلبه يكون الحاصل واحداً ابداً. واذا
ضربت كمية في واحد لا تتغير فان ضرب مقسوم اولاً في المقسوم عليه بعد قلبه ثم
في ذات المقسوم عليه يكون الحاصل الاخير مساوياً للمقسوم. اما القسمة فهي استخراج
كمية اذا ضربت في المقسوم عليه حصل المقسوم. والكمية الحاصلة من ضرب المقسوم
في المقسوم عليه بعد قلبه مستكملة الشروط المذكورة. فالقاعدة اذاً صحيحة

$$\text{اقسم } \frac{٢}{١٤} \text{ على } \frac{٢}{٣} \text{ الجواب } \frac{٣}{٧}$$

$$\text{الامتحان } \frac{٣}{٧} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٧}$$

$$\text{اقسم } \frac{٥}{٨} \text{ على } \frac{٥}{٧} \text{ الجواب } \frac{٧}{٨}$$

$$\text{الامتحان } \frac{٧}{٨} \times \frac{٥}{٧} = \frac{٥}{٨}$$

$$\text{اقسم } \frac{د ح}{ك} \text{ على } \frac{ح ر}{ت} \text{ الجواب } \frac{د ت}{ر ك}$$

$$\frac{د ح}{ك} = \frac{ح ر}{ت} \times \frac{د ت}{ر ك}$$

$$\text{اقسم } \frac{د ٢٦}{٥} \text{ على } \frac{ح ١٨}{١٠} \text{ الجواب } \frac{د ٤}{ح}$$

$$\text{اقسم } \frac{ت ب + ١}{٣ ي} \text{ على } \frac{ت ب - ١}{ك}$$

$$\text{اقسم } \frac{ح - ٢}{م} \text{ على } \frac{٢}{١ + ت}$$

٥٩ يُقسم الكسر على صحيح بضرب المخرج في ذلك الصحيح. مثاله $\frac{ت}{ب} \div \frac{٢}{٣} =$

$$\frac{ت}{ب} \div \frac{٢}{٣} = \frac{٣}{٢} \times \frac{ت}{ب} = \frac{٣ ت}{٢ ب}$$

٦٠ قد تقدم الكلام في (١٢) ان مكفوء كمية هو الخارج من قسمة واحد على

على تلك الكمية. فمكفوء $\frac{ت}{ب}$ هو $\frac{ت}{ب} \div ١ = \frac{ت}{ب}$ فيكون مكفوء كسر هو الكسر

نفسه مقلوبا. فمكفوء $\frac{ب}{٣ + ي}$ هو $\frac{٣ + ي}{ب}$ ومكفوء $\frac{١}{٣ ي}$ هو $\frac{٣ ي}{١}$ او $٣ ي$ ومكفوء $\frac{١}{٤}$ هو $\frac{٤}{١}$

٦١ قد يقع احيانا كسر في صورة كسر اخر. مثاله $\frac{٤}{٣} \div \frac{٢}{٣}$ وهذا الكسر يُنقل

من الصورة الى المخرج او بعكس ذلك بقلبه. ولا تتغير القيمة بذلك لان القسمة على كسر هي كالضرب في ذلك الكسر مقلوبا. وضرب الصورة كنفسه المخرج وقسمة

الصورة كضرب المخرج. ففي $\frac{٤}{٣} \div \frac{٢}{٣}$ يضرب ت في $\frac{٢}{٣}$ ولا تتغير القيمة ان قسمنا

المخرج على $\frac{٢}{٣}$ اي ضربناه في $\frac{٣}{٢}$ فاذا $\frac{٤}{٣} \div \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٣} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٤}{٢} = ٢$ وهكذا $\frac{٤}{٣} \div \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٢} = ٢$

$$\frac{٤}{٣} \div \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٣} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٤}{٢} = ٢$$

ثم ان هذا الكسر الواقع في الصورة يمكن ازالته لان ضرب الصورة هو كضرب

القيمة. فاذا $\frac{٤}{٣} \div \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٣} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٤}{٢} = ٢$ والقيمة $\frac{٤}{٣} \div \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٢} = ٢$

$$\begin{aligned} \text{و} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\frac{1}{2}} \times \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{6} + \frac{2}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{6} \times \frac{2}{1} = \frac{5}{3} \\ \text{وبعكس العمل} \frac{2}{7} &= \frac{2}{7} \times \frac{1}{\frac{2}{7}} = \frac{2}{7} \times \frac{7}{2} = 1 \\ \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} \times \frac{3}{3} = \frac{\frac{1}{2} \times 3}{\frac{1}{3} \times 3} = \frac{\frac{3}{2}}{1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

اما الكسر الواقع في المخرج فيزال بالقسمة اي بضرب الكسر الاصلي في ذلك

$$\begin{aligned} \text{الكسر مقلوباً. مثاله} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} &= \frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \div \frac{1}{3} &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \div \frac{1}{3} &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

٦٢ قد يكون كلا الصورة والمخرج كسراً. مثاله $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}$ فنحول هكذا

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} &= \frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \div \frac{1}{3} &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$



الفصل السابع

في المعادلات من الدرجة الاولى وهي البسيطة

٦٣ المعادلة عبارة جبرية دالة على المساواة بين كميتين فأكثر. كقولك $x + 5 = 10$ هو استعمال كمية مجهولة بواسطة تحويل المعادلة التي فيها تقع المجهولة مرتبطة مع كميات معلومة. وتحويل المعادلات هو نقل المجهولات الى جانب واحد من علامة المساواة والمعلومات الى الجانب الاخر منها بدون نزع المعادلة اي المساواة بين الجانبين. ولا ريب ان المعادلة لا تنتزع اذا اضيف الى الجانبين اشياء متساوية (اولية اولى) ولا اذا طرح منها اشياء متساوية (اولية ثانية) ولا اذا ضربا في اشياء متساوية

(اولية ثالثة) ولا اذا انقسما على اشياء متساوية (اولية رابعة) فلنا ثلث طرق لمعاملة المعادلات بدون نزع المساواة بين الجانبيين وهي النقل والضرب والقسمة اما النقل فلو فرضنا هذه المعادلة ك $- 7 = 9$ نضيف الى الجانبيين 7 فنصير ك $- 7 + 7 = 9 + 7$ ولكن $0 = 16$ فيبقى ك $= 9 + 7$ فوجدنا قيمة المجهولة ك وهي $9 + 7$ اي ١٦

نفرض ايضا ك + ب = ت

اطرح ب من الجانبيين فنصير ك + ب - ب = ت - ب ولكن ب - ب = ٠ فاذا ك = ت - ب

فترى ان العمل قد تم بنقل المعلومة من الجانب الواحد الى الاخر مع تبديل علامتها وهذا العمل يقال له المقابلة. ولنا مما سبق هذه القاعدة

متى ارتبطت الكمية المجهولة مع كميات معلومة بعلامة الجمع او الطرح فانقل المعلومات الى الجانب المتقابل وابدل علاماتها

مفروض ك + ٣ - ب - م = ح - د

بالمقابلة ك = ح - د - ٣ + ب + م

٦٤ متى وقعت كميات متشابهة على جانب واحد يجب جمعها حسب قواعد

الجمع

فلو فرض ك + ٥ - ب - ٤ = ح = ٧ ب

بالمقابلة ك = ٧ - ب - ٥ + ٤ = ح

وبالجمع ك = ٢ + ب + ٤ = ح

اذا كانت المجهولة على الجانبيين يجب نقلها الى جانب واحد

فلو فرض ٢ ك + ٢ = ح + د + ٣ ك

بالمقابلة ٢ ك - ٢ = ح - د + ٣ ك - ٢ ك

وبالجمع ح - د = ك

٦٥ اذا وقعت كميات متساوية بعلامات متشابهة على الجانبيين يمكن طرحها

منها في الحال

$$\text{فلو فرض } ك + ٢ = د + ٣ + ح + ٧ د$$

$$\text{اطرح } ٢ + ح \text{ من الجانبين}$$

$$ك + د = ٧ + ب$$

$$\text{وبالمقابلة والجمع } ك = ٦ + ب$$

ولا فرق في ترتيب الكميات ولا في الجانب الذي تُنقل اليه. وإذا ابدلت جميع علامات الجانبين لا تتغير المعادلة. مثاله $ك - ب = د - ت$ بالمقابلة لنا $د + ت = ك + ب$ او $ك + ب = د + ت$ وإذا نُقل جميع الكميات الى الجانب الواحد يبقى الاخر صفراً. فلو فرض $ك + ب = د$ فحينئذ $ك + ب - د = ٠$

وعلى ما تقدم نتحول هذه المعادلات

$$ت + ٢ - ك = ٨ - ب - ٤ + ك + ت$$

$$٢ - ت - ب - ح = ت + ٢ - ت - ب - ح + م$$

$$٢٠ + ٧ + ك = ٨ - ٦ + ح + ٦ - ك - د + ب$$

$$٢١ - ٤ + ك + د = ١٢ - ٢ - ك - ٧ + ب + ح + د$$

$$٦٦ \text{ اما الضرب فيستعمل متى انقسمت الكمية المجهولة على معلومة كما في } \frac{ك}{ت} =$$

ب بضرب الجانبين في ت فتصير $ك = ت ب$

ولنا من ذلك هذه القاعدة

متى انقسمت المجهولة على معلومة فاضرب الجانبين في تلك المعلومة

ثم قابل واجمع كما تقدم

$$\text{فلو فرض } \frac{ك}{س} + ت = ب + د$$

$$\text{اضرب الجانبين في س } ك + ت س = ب س + د س$$

$$\text{وبالمقابلة } ك = ب س + د س - ت س$$

وهذا العمل يقال له الجبر اي اعادة الكسر صحيحاً

$$\text{مفروض } ك = ٥ + \frac{٤ - ك}{٦} = ٢٠$$

$$\text{بالجبر } ك - ٤ = ٢٠ - ٤$$

$$\text{بالمقابلة } ك = ١٢٠ - ٤ + ٢٠ = ١٤$$

$$\text{مفروض} \quad \frac{\text{ك}}{\text{ت} + \text{ب}} = \text{د} + \text{ح}$$

$$\text{بالجبر} \quad \text{ك} + \text{ت} + \text{د} + \text{ب} = \text{د} + \text{ت} + \text{ح} + \text{ب}$$

$$\text{بالمقابلة} \quad \text{ك} = \text{ت} + \text{ح} - \text{ب} - \text{د}$$

وهكذا متى وقعت المجهولة في مخرج كسر يضرب الجانبان في ذلك المخرج

$$\text{مفروض} \quad ٨ = ٧ + \frac{٦}{\text{ك} - ١٠}$$

$$\text{اضرب في } (١٠ - \text{ك}) \quad ٨ - ٨٠ = \text{ك} - ٧٠ + ٦$$

$$\text{بالمقابلة والمجمع} \quad ٤ = \text{ك}$$

$$٦٧ \text{ لو فرض} \quad \frac{\text{ح}}{\text{س}} + \frac{\text{د}}{\text{ب}} = \frac{\text{ك}}{\text{ت}}$$

$$\text{فالضرب في ت نصير} \quad \text{ك} = \frac{\text{ت د}}{\text{ب}} + \frac{\text{ت ح}}{\text{س}}$$

$$\text{وبالضرب في ب نصير} \quad \text{ب ك} = \text{ت د} + \frac{\text{ت ب ح}}{\text{س}}$$

$$\text{وبالضرب في س نصير} \quad \text{ب س ك} = \text{ت د س} + \text{ت ب ح}$$

$$\text{او بالضرب في جميع الخارج دفعة واحدة نصير} \quad \frac{\text{ت ب س ك}}{\text{ت}} = \frac{\text{ت ب د س}}{\text{ب}}$$

$$+ \frac{\text{ت ب ح س}}{\text{س}}$$

ثم باخراج الاحرف المتشابهة من الصور والخارج لنا كما في الاول ب س ك = ت س د + ت ب ح ولنا من ذلك هذه القاعدة لازالة الكسور من معادلة اي لجبرها

اضرب كل صورة في جميع الخارج الا مخرجها

$$\text{مفروض} \quad \frac{\text{ك}}{\text{ت}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}} + \frac{\text{ح}}{\text{ع}} - \frac{\text{ي}}{\text{م}}$$

$$\text{بالجبر} \quad \text{د ع م ك} = \text{ت ب ع م} + \text{ت د م ي} - \text{ت د ع ح}$$

$$\text{مفروض} \quad \frac{\text{ك}}{\text{ف}} = \frac{\text{ر}}{\text{ق}} + \frac{\text{س}}{\text{و}} + \frac{\text{ط}}{\text{ز}}$$

$$\text{بالجبر} \quad ٣٠ = \text{ك} = ٤٠ + ٤٨ + ١٨٠$$

٦٨ اذا كانت علامة كسر سلبية وجب تبديلها بدون تغيير القيمة كما نقدم في

فصل الكسور (٤٧)

$$\text{مفروض} \quad \frac{\text{ت} - \text{د}}{\text{ك}} = \text{س} - \frac{\text{ب}^2 - \text{ب} \text{ح}^2 - \text{ن}}{\text{ر}}$$

$$\text{بتبديل العلامات} \quad \frac{\text{ت} - \text{د}}{\text{ك}} = \text{س} + \frac{\text{ب}^2 - \text{ب} \text{ح}^2 + \text{ن}}{\text{ر}}$$

ثم بالمجبر ت ر - د ر = ر س ك - ب ك + ح م ك + ك ٦ ك ن
٦٩ اما القسمة فتغلث بها المعدلات متى ضربت المجهولة في المعلومة وذلك
بقسمة جانبي المعادلة على تلك المعلومة. فلو فرض ت ك + ب - ح ٢ = د
فبالمقابلة تصيرت ك = د - ب + ح ٢ وبالقسمة على ت ك = $\frac{\text{د} - \text{ب} + \text{ح}^2}{\text{ت}}$

$$\text{مفروض} \quad \text{ك}^2 = \frac{\text{ت}}{\text{س}} - \frac{\text{د}}{\text{ح}} + \text{ب}$$

$$\text{بالمجبر} \quad \text{ك}^2 \text{س} \text{ح} = \text{ت} \text{ح} - \text{س} \text{د} + \text{ب} \text{س} \text{ح}$$

$$\text{بالقسمة على ك}^2 \text{س} \text{ح} \quad \text{ك} = \frac{\text{ت} \text{ح} - \text{س} \text{د} + \text{ب} \text{س} \text{ح}}{\text{ك}^2 \text{س} \text{ح}}$$

$$\text{مفروض} \quad \text{ك}^2 - \text{ب} \text{ك} = \text{ت} - \text{د}$$

$$\text{حسب (٢٨) (ب - ك) × ك = ت - د}$$

$$\text{بالقسمة على ك}^2 - \text{ب} \quad \frac{\text{ت} - \text{د}}{\text{ب} - \text{ك}} = \text{ك}$$

$$\text{مفروض} \quad \text{ت} \text{ك} + \text{ك} = \text{ح} - \text{د}$$

$$\text{بالقسمة على ت} + \text{ك} \quad \frac{\text{ح} - \text{د}}{\text{ت} + \text{ك}} = \text{ك}$$

$$\text{مفروض} \quad \text{ك} - \frac{\text{ب} - \text{ك}}{\text{ح}} = \frac{\text{ت} + \text{د}}{\text{ك}}$$

$$\text{بالمجبر} \quad \text{ك}^2 \text{ح} - \text{ك}^2 = \text{ب} \text{ك} + \text{ت} \text{ح} + \text{د} \text{ح}$$

$$\text{بالمقابلة والقسمة} \quad \text{ك} = \frac{\text{ت} \text{ح} + \text{د} \text{ح} + \text{ب} \text{ك}}{\text{ك}^2 \text{ح} - \text{ك}^2}$$

٧٠ اذا ضرب كل جزء من المعادلة في كمية ما فيجب قسمة المعادلة عليها.

واذا انقسم كل جزء على كمية ما فيجب ضرب المعادلة فيها. وهكذا تصير ايسر مما كانت وتسهل معاملتها حسبما تقدم

مفروض ت ك + ٣ ت ب = ٦ ت د + ت

بالقسمة على ت ك + ٣ ت ب = ٦ د + ١

بالمقابلة ك = ٦ د + ١ - ٣ ب

$$\frac{د - ح}{ك} = \frac{ب}{ك} - \frac{١ + ك}{ك} \quad \text{مفروض}$$

بالضرب في ك حسب (٤٨) ك + ١ - ب = ح - د

بالمقابلة ك = ح - د + ب - ١

مفروض ك × (ت + ب) - ت - ب = د × (ت + ب)

بالقسمة على ت + ب ك - ١ = د

وبالمقابلة ك = د + ١

٧١ اذا اقتضى كتابة مسئلة على هيئة النسبة فتتحول تلك النسبة الى معادلة

بان تجعل حاصل الطرفين مساوياً لحاصل الوسطين كما عرفت في علم الحساب .

فان فرضت : ب :: س : د فاذا ت د = ب س وان فرض ٢ : ٤ :: ٦ : ٨

فحينئذ ٢ × ٨ = ٤ × ٦ وهكذا ك : ب :: س : ح د ثم ت د ك = ب ح

س وايضاً ت + ب : س :: ح - م : ي ثم ت ي + ب ي = ح س - م س

٧٢ تحول معادلة الى نسبة بفك الجانب الواحد الى ضلعين فيجعلان

طرفين . والجانب الاخر الى ضلعين فيجعلان وسطين . فلو فرضت ب س = د

ي ح فينفك الجانب الاول الى ت × ب س او ت ب × س او ت س × ب

وهكذا ينفك الجانب الاخر الى د × ي ح او د ي × ح او د ح × ي

ولنا من ذلك عدة نسب اي ت : د :: ي : ح ب : س وايضاً ت ب : د ي ::

ح : س او ت س : د ح :: ي : ب وهلم جرا لان هذه النسب كلها اذا تحولت الى

معادلات تصيرت ب س = د ي ح

فلو فرض ايضاً ت ك + ب ك = س د - س ح لانفك الجانب الاول الى

ك × (ت + ب) والثاني الى س × (د - ح) ولنا ك : س :: د - ح : ت + ب

او د - ح : ك :: ت + ب : س وهلم جرا

امثلة

$$(١) \text{ مفروض } ٧ + \frac{٥}{٨} = ٦ + \frac{٢}{٤}$$

$$\text{بالجبر } ٢٢٤ + ك٢٠ = ١٩٢ + ك٢٤$$

$$\text{بالمقابلة والجمع } ٣٢ = ك٤$$

$$\text{بالقسمة على } ٤ = ك٨$$

$$(٢) \text{ مفروض } ت + \frac{ك}{ب} - \frac{ك}{س} = ح + \frac{ك}{ب}$$

$$\text{بالجبر ب س ك + ب ت ح س = ت س ك - ت ب ك + ت ب س د}$$

$$\text{بالمقابلة والقسمة } ك = \frac{ت ب س د - ت ب ت ح س}{ب س - ت س + ت ب}$$

$$(٣) \text{ مفروض } ١٢ = ك٤٠ - ٦ - ك١٦ = ١٢٠ - ١٤ - ك١٢$$

$$(٤) \quad \frac{٩٢}{٤} = ك \quad \frac{١٩ - ك}{٢} - ٢٠ = \frac{ك}{٣} + \frac{٢ - ك}{٢}$$

$$(٥) \quad = ك \quad \frac{ك}{٤} - ٢٠ = \frac{ك}{٥} + \frac{ك}{٣}$$

$$(٦) \quad = ٥ \quad ٥ = ٤ - \frac{١ - ت}{٥}$$

$$(٧) \quad = ك \quad ٨ = ٢ - \frac{٢}{٤ + ك}$$

$$(٨) \quad = ل \quad ١ = \frac{ل ٦}{٤ + ل}$$

$$(٩) \quad = ك \quad ١١ = \frac{ك}{٦} + \frac{ك}{٣} + ك$$

$$(١٠) \quad = ك \quad \frac{٧}{١٠} = \frac{ك}{٤} - \frac{ك}{٣} + \frac{ك}{٢}$$

$$(١١) \quad = ٥ \quad \frac{٥ - ٢٨٤}{٥} = ٦ + \frac{٥ - ٥}{٤}$$

$$(١٢) \quad \frac{٢٧ - ك١١}{٢} + ٥ = \frac{٦ + ك٢}{٥} + ك٢$$

$$(١٣) \quad ك + \frac{ك٤ - ١٨}{٣} = ٢ - \frac{٤ - ك٦}{٣}$$

$$(١٤) \quad \frac{ك٧ - ٩٧}{٢} + \frac{٥ - ك٥}{٨} = \frac{١١ - ك٢}{١٦} + ٢١$$

$$\frac{1}{12} - \frac{14 + ك ٥}{3} = 4 - \frac{4 - ك}{4} - ك \quad (١٥)$$

$$\frac{9 + ك ٢}{2} = 7 + \frac{ك 4 + 16}{5} - \frac{٥ + ك ٧}{3} \quad (١٦)$$

$$\frac{14 + ٧}{3} + ٧ - ٥ = \frac{2 + ٤}{3} - \frac{٢ - ١٧}{5} \quad (١٧)$$

$$\frac{4 - 24}{5} + \frac{8 - 26}{7} - \frac{2 - 20}{2} = 4 + \frac{2 - 22}{5} - م \quad (١٨)$$

$$\frac{4 + ك 2}{3} = \frac{12 - ك ٧}{2 - ك 6} + \frac{٧ + ك 6}{9} \quad (١٩)$$

$$4 : ٧ :: \frac{ك - 18}{4} : \frac{4 + ك ٥}{3} \quad (٢٠)$$

عمليات

(١) سئل رجل عن ثمن ساعته فقال ان ضرب ثمنها في اربعة واضيف الى الحاصل سبعون وطرح المجموع خمسون يكون الباقي ٢٢٠ ديناراً. فكم ثمن الساعة افرض ثمن الساعة ك

واذا ضرب هذا الثمن في ٤ بصير ٤ ك

ثم اصف الى هذا الحاصل ٧٠ فيصير ٤ ك + ٧٠

اطرح من المجموع ٥٠ فيصير ٤ ك + ٧٠ - ٥٠

وهذا الباقي يعادل ٢٢٠ ديناراً اي ٤ ك + ٧٠ - ٥٠ = ٢٢٠

وبتحويل هذه المعادلة لنا ك = ٥٠

فقد وجدنا ثمن الساعة خمسين ديناراً. ولا متحان العمل نوضع قيمة المجهول عوض المجهول في المعادلة الاصلية فان كان الجانبان متساويين كان العمل صحيحاً ولا فلا. مثاله في المسئلة السابقة بالتعويض عن ك بخمسين نصير ٤ ك + ٥٠ = ٢٢٠ وهو صحيح

(٢) اي عدد يضاف اليه نصفه ثم يطرح ٢٠ من المجموع فيكون الباقي ربع

العدد

افرض العدد ك

ثم حسب شروط المسئلة ك + $\frac{ك}{2}$ = ٢٠ - $\frac{ك}{4}$

ونحويل هذه المعادلة نصير ك = ١٦

$$\frac{16}{4} = 20 - \frac{16}{3} + 16$$

(٢) رجل قسم مبلغاً بين اولاده الثلاثة فاعطى الاول نصف المبلغ الا الف دينار. والثاني ثلث المبلغ الا ٨٠٠ دينار. والثالث ربع المبلغ الا ٦٠٠ دينار. فكم كان المبلغ

$$\text{اذا فرضنا ان المبلغ ك تكون الحصص } \frac{ك}{3} - 1000 - \frac{ك}{4} - 800 - \frac{ك}{4} - 600$$

$$700 \text{ ومجموع هذه الثلاثة يعادل المبلغ اي } \frac{ك}{3} + \frac{ك}{4} + \frac{ك}{4} = 2400 \text{ ك}$$

$$\text{وبالتحويل ك} = 28800$$

(٤) اقسام ٤٨ الى قسمين حتى ينقسم اكبرها على ٦ واصغرهما على ٤ ويكون مجتمع الخارجين ٩

ان فرض الاصغر ك يكون الاكبر ٤٨ - ك

$$\text{وحسب شروط المسئلة } \frac{ك}{4} + \frac{48 - ك}{6} = 9$$

وبالتحويل ك = ١٢ اصغرهما ٤٨ - ١٢ = ٣٦ اكبرها

(٥) اي عدد اذا اضيف اليه نصفه يكون المجموع اكثر من ٦٠ بفضلته العدد ٦٥

$$\text{افرض العدد ك فلنا ك} + \frac{ك}{2} = 60 - ك$$

$$ك = 0$$

(٦) اقسام ٢٢ الى قسمين حتى ينقسم اصغرهما على ٦ واكبرها على ٥ ويكون مجتمع الخارجين ٦

لفرض اصغرهما ك فيكون اكبرها ٢٢ - ك

$$\text{وبشروط المسئلة } \frac{ك}{6} + \frac{22 - ك}{5} = 6$$

$$ك = 12 \text{ اصغرهما } 22 - 12 = 10 \text{ اكبرها}$$

(٧) اقسام ٢٥ الى قسمين يكون اكبرها ٤٩ من اصغرهما

$$\text{لفرض الاصغر ك والاكبر } 25 - ك \text{ فلنا } 25 - ك = 49 \text{ ك} = \frac{1}{3}$$

اصغرها $\frac{1}{3}$ و 24 اكبرها

(٨) اقسام 48 الى 9 اقسام حتى يكون كل قسم اكبر من الذي قبله بنصف

ليكن القسم الاصغر ك

فيكون الثاني $ك + \frac{1}{3}$

والثالث $ك + 1$

والرابع $ك + 1\frac{1}{3}$

وهلم جرا $ك + 2$

$ك + 2\frac{1}{3}$

$ك + 3$

$ك + 3\frac{1}{3}$

$ك + 4$

نجمع هذه الاقسام $9 ك + 18 = 48$

$ك = 2\frac{1}{3}$

والاقسام $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

$48 = 7\frac{1}{3} + 7\frac{0}{6}$

تنبيه. هذه المسئلة تحل ايضا بقواعد السلسلة الحسابية على اسهل طريقة كما ستعلم

(٩) اي عدد يطرح واحد من مضاعفه ثم يضاعف الباقي ويطرح منه 2

ويقسم هذا الباقي على 4 فيكون الخارج اقل من العدد بواحد

لنفرض العدد ك فيكون مضاعفه $2 ك$ وان طرح منه واحد يكون $2 ك - 1$

ومضاعفه $4 ك - 2$ ثم يطرح 2 فيكون $4 ك - 4$ اي $4 ك - 4$ وبالقسمة

على 4 يصير $ك - 1$ وهذا يعادل العدد الا واحدا اي $ك - 1 = ك - 1$

فلما ما يئسى معادلة ذاتية. وهذه المعادلة تدل على ان المجهول غير معين فيمكن

ان يفرض اي عدد شئت

(١٠) رجل اشترى اذرعاً من القماش وكان ثمن كل ٥ اذرع ٧ غروش.
ثم باع ما اشتراه بثمن ١١ غرشاً لكل ٧ اذرع ورجع ١٠٠ غرش فكم ذراعاً اشترى
لفرض الاذرع ك و $\frac{٧}{٥}$ الغرش ثمن الذراع و $\frac{٧}{٥}$ ثمن الاذرع كلها
ثم عند البيع كان ثمن الذراع $\frac{١١}{٧}$ من الغرش و ثمن الجميع $\frac{١١}{٧}$ وفضلة
الشرأء والبيع ١٠٠ اي $\frac{١١}{٧} - \frac{٧}{٥} = \frac{٧}{٥} - \frac{١١}{٧} = ٦١٠٠ - ٣٥٠٠ = ك$
٥٨٣ $\frac{١}{٣}$

(١١) اي عدد اذا اضيف اليه ٧٢٠ وقسم المجموع على ١٢٥ يعادل الخارج
٧٣٩٢ مقسوماً على ٤٦٢

الجواب ١٢٨٠

(١٢) احد التجار تاجر في صنف من البضائع فرج او خسر وفي صنف آخر
رجع ٢٥٠ ديناراً وفي صنف آخر خسر ٦٠ ديناراً ورجع من الاصناف الثلاثة ٢٠٠
دينار فكم ربح او خسر في الاول
لفرض المجهول ك فان حسبنا الربح + تكون الخسارة - فلنا ك + ٢٥٠ -
٢٠٠ = ٦٠ وبالمقابلة ك = - ٩٠

فكون الجواب سلبياً يدل على انه خسر في الاول

(١٣) سفينة سافرت الى الشمال ٤° ثم الى الجنوب ١٣° ثم الى الشمال ايضاً
١٧° ثم الى الجنوب ايضاً ١٩° وكان لها حينئذ ١١° من العرض الجنوبي فكم كان
عرضها في الاول

لفرض ك = العرض المطلوب فان حسبنا الشمال + يكون الجنوب - ولنا
ك + ٤ - ١٣ + ١٧ - ١٩ = ١١ ك اي كانت على خط الاستواء
(١٤) اي عدد اذا انقسم على ١٢ يكون مجموع الخارج والمقسوم والمقسوم
عليه ٦٤

لفرض ك = العدد فلنا $\frac{ك}{١٢} + ك + ١٢ = ٦٤$

وبالجبر والمقابلة والقسمة ك = $\frac{٦٢٤}{١٢} = ٤٨$

(١٥) رجل اشترى ١٢ ثوب قماش منها اثنان ابيضان وثلاثة سود وسبعة زرق بثمن ١٤٠ ديناراً. وكان ثمن الثوب الاسود يزيد عن ثمن الابيض دينارين والازرق عن الاسود ثلثة دنانير فكم كان ثمن كل واحد منها
 لنفرض ك = ثمن الابيض فيكون ثمن الثوبين ٢ ك و ثمن الاسود ك + ٢ فيكون
 ثمن الثلاثة ٢ ك + ٦ و ثمن الثوب الازرق ك + ٥ فيكون ثمن السبعة ٧ ك + ٣٥
 والمجموع ١٢ ك + ٤١ فلنا ١٢ ك + ٤١ = ١٤٠ = ك $\frac{1}{4}$ = ٨ = ثوباً ابيض
 $\frac{1}{4}$ = ١٠ = ثوباً اسود $\frac{1}{4}$ = ١٣ = ثوباً ازرق

(١٦) مبلغ اتقسم بين اربعة وراث فكان الاول ٢٠٠ دينار زيادة عن $\frac{1}{4}$ المبلغ. والثاني ٢٤٠ زيادة عن $\frac{1}{5}$ المبلغ. والثالث ٣٠٠ دينار زيادة عن $\frac{1}{6}$ المبلغ. والرابع ٤٠٠ دينار زيادة عن $\frac{1}{8}$ المبلغ. فكم كان ذلك المبلغ الذي اتقسم

الجواب ٤٨٠٠ ديناراً

(١٧) مطلوب عدد اقل من ٥٠٠ بمقدار زيادة خمس على ٤٠
 الجواب ٤٥٠

(١٨) ما عددان فضلتهما ٤٠ ونسبة احدهما الى الاخر كسبة ٦ الى ٥
 الجواب ٢٤٠ و ٢٠٠

(١٩) مزيج من النحاس والقصدير والرصاص كان فيه النصف الا ١٦ رطلاً نحاساً. والثلث الا ١٢ رطلاً قصديراً. وكان الرصاص اكثر من الربع باربعة ارطال. فكم رطلاً من كل صنف كان في ذلك المزيج
 الجواب كان النحاس = ١٢٨ رطلاً. والقصدير = ٨٤ رطلاً. والرصاص = ٧٦ رطلاً

(٢٠) مركبان بينهما ١٨ ميلاً. والمتاخر منها يجري ١٠ اميال في الساعة والمتقدم ٨ اميال فكم ميلاً يجري المتقدم قبل ان يلحقه المتاخر
 الجواب ٧٢ ميلاً

(٢١) ما عددان مجتمعهما سدس حاصلها ونسبت احدها الى الاخر كسبة

٢ الى ٢

الجواب ١٥ و ١٠

(٢٢) كلب وارنب بينهما ٥٠ قفزة. وكلما قفز الكلب ٢ قفزات يقفز الارنب ٤ غير ان الفئزين من الكلب تساويان ٢ قفزات من الارنب. فكم قفزة يقفز الكلب قبل ان يدرك الارنب

الجواب ٢٠٠

(٢٣) ثلثة شعرة مدحوا ملكاً. فجعل الملك جازنة الاول ٢٠٠ دينار. و جازنة الثاني كالاول وثلث الثالث. و جازنة الثالث كججمع الجازنتين الأولين. فكم مجتمع الجوايز الثلاث

الجواب ١٢٠٠ دينار

(٢٤) اي عددٍ نسبته الى ١٢ مع ثلاث مرات العدد كسبة ٢ : ٩

الجواب ٨

(٢٥) زورق تقدم عن مركب ١٢ ميلاً وكان يجري ٢ اميال كلاً جري المركب ٥ اميال. فكم ميلاً يجري المركب قبل ان يدرك الزورق

الجواب $٢٢\frac{1}{3}$ ميل

(٢٦) اي عددٍ فضلة سدس وثلثه ٢٠

الجواب ٤٨٠

(٢٧) اقسام ٢٠٠٠ الى قسمين بحيث تكون نسبة احدها الى الاخر ٩ : ٧

الجواب ١١٢٥ و ٨٧٥

(٢٨) اي عددٍ مجتمع ثلثه وربعه وخمسه ٩٤

الجواب ١٢٠

(٢٩) بين زيد وعمرو مسافة ٣٦٠ ميلاً فصارا حتى التقيا. اما زيد فصار كل ساعة ١٠ اميال واما عمرو فثمانية اميال في الساعة. فكم قطع كل واحدٍ من المسافة قبل ان التقيا

الجواب زيد = ٢٠٠ ميل وعمرو ١٦٠ ميلاً

(٣٠) رجلٌ عاش ثلث عمره في القسطنطينية ورُبعة في دمشق والباقي وهو ٢٠ سنة في مصر فكم سنة عاش

الجواب ٤٨ سنة

(٣١) اي عددٍ فضله ربعه وخمسه ٩٦

الجواب ١٩٢٠

(٣٢) عمودٌ في بركة خمسة في الارض و $\frac{2}{3}$ منه في الماء و ١٢ قدماً فوق الماء فكم قدماً طول العمود

الجواب ٣٥ قدماً

(٣٣) اي عددٍ اذا اضيف اليه ١٠ يكون $\frac{2}{3}$ المجموع ٦٦

الجواب ١٠٠

(٣٤) بستانٌ كان فيه $\frac{2}{3}$ الاشجار تفاحاً و $\frac{1}{3}$ كمثرى والبقية وهي ٢٠ شجرة اكثر من ثمن الجميع سفرجلاً فكم شجرة في البستان

الجواب ٨٠٠

(٣٥) رجلٌ اشترى ارطالاً من الخمر ثمن ٩٤ غرشاً وشرب منها سبعة ارطال ثم باع ربع الباقي بعشرين غرشاً على سعر مشترائه فكم رطلاً اشترى

الجواب ٤٧ رطلاً

(٣٦) لزيد وعبيد ايرادٌ واحدٌ سنوياً. اما زيدٌ فانفق كل سنة فوق ايراده مبلغاً يساوي $\frac{1}{3}$ الايراد. واما عبيدٌ فانفق كل سنة $\frac{2}{3}$ ايراده. وبعد ١٠ سنين حصل عنده مبلغٌ يساوي المال الذي انكسر على زيد مع زيادة ١٦٠ ديناراً. فكم كان الايراد

الجواب ٢٨٠ ديناراً

(٣٧) رجلٌ عاش ربع عمره بنولاً. ثم تزوج وبعد ذلك بمدة ٥ سنين اكثر من $\frac{1}{3}$ عمره ولد له ابنٌ. ثم مات الابن قبل ابيه بمدة ٤ سنين وهو قد بلغ نصف عمر ابيه. فكم سنة عاش الرجل

الجواب ٨٤ سنة

$$(٣٨) \text{ ابنة عددٍ مجموع } \frac{1}{3} \text{ و } \frac{1}{4} \text{ و } \frac{2}{7} \text{ منه } ٧٣$$

الجواب ٨٤

$$(٣٩) \text{ رجلٌ انفق } ١٠٠ \text{ ديناراً أكثر من } \frac{1}{6} \text{ ابراده في } ٣٥ \text{ ديناراً أكثر من نصفه}$$

فكم كان الابراد

الجواب ٤٥٠

$$(٤٠) \text{ مقدارٌ من البارود كان فيه } ١٠ \text{ ارطال أكثر من } \frac{2}{3} \text{ الجميع والكبريت } \frac{4}{3} \text{ رطل أقل من } \frac{1}{6} \text{ الجميع والنعم أقل من } \frac{1}{7} \text{ الملح برطلين. فكم رطلاً كان البارود}$$

الجواب ٦٩ رطلاً

$$(٤١) \text{ وعاءٌ بسع } ١٤٦ \text{ رطلاً امتلأ بهنّج من سمنٍ وعسلٍ وماءٍ. وكان العسل أكثر من السمن بخمسة عشر رطلاً والماء بقدرها جميعاً. فكم رطلاً كان فيه من كل صنف}$$

الجواب كان السمن ٢٩ رطلاً والعسل ٤٤ والماء ٧٣

$$(٤٢) \text{ اربعة اشخاص اشتركوا في شراء بستانٍ ثمنه } ٤٧٥٥ \text{ ديناراً. فدفع زيدٌ من الثمن ثلثة اضعاف ما دفعه عمروٌ. ودفع عبيدٌ بقدر ما دفعاً كلاهما. ودفع عبدالله بقدر ما دفع زيدٌ وعبيدٌ معاً. فكم دفع كل واحدٍ منهم}$$

$$\text{الجواب دفع زيد } = ٩٥١ \text{ و عمرو } = ٣١٧ \text{ وعبيد } = ١٢٦٨ \text{ وعبدالله } = ٢٢١٩$$

$$(٤٣) \text{ اقسام } ٩٩ \text{ الى خمسة اقسام يكون الاول أكثر من الثاني بثلثة وأقل من الثالث بعشرة وأكثر من الرابع بتسعة وأقل من الخامس بسنة عشر}$$

$$\text{لفرض ك} = \text{الاول} = \text{ك} - ٣ = \text{الثاني} = \text{ك} + ١٠ = \text{الثالث} = \text{ك} - ٩ = \text{الرابع} = \text{ك} + ١٦ = \text{الخامس} = \text{ك} + ١٤ = ٩٩ \text{ ك} = ٨٥ \text{ ك} = ١٧$$

$$(٤٤) \text{ رجلٌ قسم ما لآبين اولاده الاربعة فاعطى الثالث ٩ غروش زيادة عن الرابع. والثاني ١٢ غرشاً زيادة عن الثالث. ولأول ١٨ غرشاً أكثر من الثاني.}$$

وكان الجميع يزيد ٦ غروش عن حصة الرابع سبع مرات فكم كان المال
الجواب ١٥٢ غرشاً

(٤٥) كان لرجل قطيعان من الغنم متساويين في عدد الرؤوس فباع من
القطيع الواحد ٣٩ رأساً ومن الاخر ٩٣ رأساً فكان الواحد مضاعف الاخر في
العدد. فكم رأساً كان كل قطيع

الجواب ١٤٧

(٤٦) ساع سعي خمسة ايام وكان يقطع كل يوم ٦٠ ميلاً. ثم تبعه اخر وكان
يقطع كل يوم ٧٥ ميلاً ففي كم يوم يدرك الاول

الجواب في ٣٠ يوماً

(٤٧) كان عمر زيد مضاعف عمر عبيد. وعمر عبيد بقدر عمر عبدالله ثلث
مرات. ومجموع اعمار الثلاثة ١٤٠ سنة فكم عمر كل واحد منهم

الجواب عمر زيد ٨٤ وعبيد ٤٢ وعبدالله ١٤

(٤٨) ثوبان قيمة الذراع من كليهما واحدة ولكن الواحد اطول من الاخر فبلغ
ثن الواحد ٥ دنانير والاخر $\frac{1}{3}$ ٦ دينار. فان اضيف الى كل واحد منها ١٠ اذرع
كان الواحد الى الاخر :: ٦ : ٥ مطلوب طول كل ثوب

الجواب ٢٠ و ٢٦ ذراعاً

(٤٩) تاجران راس مال الواحد منها كراس مال الاخر. وفي السنة الاولى
ربح احدهما زيد ٤٠ ديناراً وخسر احدهما عبيد ٤٠ ديناراً. وفي السنة الثانية خسر
زيد $\frac{1}{3}$ ما كان له في نهاية السنة الاولى وربح عبيد ٤٠ ديناراً اقل من مضاعف ما
خسره زيد. وكان لعبيد حينئذ مضاعف ما كان لزيد فكم كان راس المال

الجواب ٢٢٠ ديناراً

(٥٠) اي عدد اذا اضيف الى ٢٦ ثم الى ٥٢ تكون نسبة المجموع الاول الى
الثاني :: ٣ : ٤

الجواب ١٢

(٥١) رجل اشترى جملاً وفرساً وحلاً بثلاثمائة وستين ديناراً. وكان ثمن الفرس

مضاعف ثمن الحمار وثن الجمل مضاعف ثمن الفرس والحمار كليهما. فإذا كان ثمن كل واحدٍ من الثلاثة

الجواب ثمن الجمل = ٢٤٠ والفرس = ٨٠ والحمار = ٤٠ ديناراً

(٥٢) أنا أنأمتلاً خمرًا ثم رشح منه ثلث ما فيه ثم أخذ منه ٢١ رطلاً وبقي نصف ملء الأناة فكم رطلاً كان فيه أولاً

الجواب ١٢٦ رطلاً

(٥٣) رجلٌ كان له سنة بنين كل واحدٍ منهم أكبر من الذي يليه بأربع سنين وعمر الأكبر ثلاثة أضعاف عمر الأصغر. فما هو عمر كل واحدٍ منهم

الجواب ١٠ ١٤ ١٨ ٢٢ ٢٦ ٣٠

(٥٤) اقسام ٤٩ الى قسمين تكون نسبة الأكبر مع سنة الى الأصغر ١١

كسبة ٩ : ٢

الجواب ٣٠ = الأكبر ١٩ = الأصغر

(٥٥) ما عددان نسبة أصغرهما الى الأكبر :: ٢ : ٣ وان أضيف اليها ٤ تكون

النسبة :: ٥ : ٧

الجواب ١٦ و ٢٤

(٥٦) رجلٌ اشترى زقّين من الخمر ملوئين أحدهما بسبع ملّ الآخر ثلاث مرات

فاخذ من كل واحدٍ أربعة ارطال وبقي في الواحد قدر ما بقي في الآخر أربع مرات فكم رطلاً كان فيها

الجواب ١٢ و ٣٦

(٥٧) اقسام ٦٨ الى قسمين تكون فضلة أكبرها ٨٤ بقدر ثلاث مرات

فضلة أصغرهما ٤٠

الجواب ٤٢ و ٢٦

(٥٨) أربعة أماكن على ترتيب ب ث ج وبين ب و ج ٣٤ ميلاً وبعُد

عن ث الى بعد ث عن ج :: ٢ : ٣ وإذا أضيف ربع بُعْد ب عن ث الى نصف بُعْد

ث عن ج يكون المجموع ثلاث مرات بعد ث عن ث مطلوب بعد كل واحدٍ عن

الآخر

٧٤ يُدَلُّ على القوات برقم صغير عن يسار الكمية مرتفع عنها قليلاً. مثاله
 ت^١ و ب^٢ وس^٣ ويقال لهذا الرقم دليل القوة. وإن لم يكن للكمية دليل يُقدَّر لها واحدٌ
 دليلاً. فان ت^١ = ت اي قوة ت الاولى. واذا انحصرت كمية ووضع لها دليل مثل
 (ك + ب - س)^٢ او ت + م + ن^٣ فيراد ان الكمية كلها يجب ترقينها الى القوة
 المدلول عليها. وقد يكون الدليل حرفاً متى كانت القوة مجهولة مثل ب^١ اي القوة
 النونية من ب

تنبيه. يجب ان يميز بين المسميات والدلائل. فان ت^٤ مثلاً يراد بها ت + ت
 + ت ولكن ت^٤ يراد بها ت × ت × ت × ت

٧٥ اذا نظرنا الى سلسلة قوات نرى ان الادنى يحدث من قسمة الاعلى على
 الكمية الاصلية. مثاله ت^١ + ت = ت^٢ وت^٢ + ت = ت^٣ وت^٣ + ت = ت^٤ وت^٤ + ت = ت^٥
 + ت = ت وت + ت = ت + ١ و ١ + ت = $\frac{١}{٢}$ وت^١ ÷ $\frac{١}{٢}$ = ت ÷ $\frac{١}{٢}$ وت^١ ÷ $\frac{١}{٣}$ = ت
 = ت ÷ $\frac{١}{٣}$ وهلمَّ جراً. فالواقعة بعد الواحد هي مكفوءة التي قبل الواحد (١٢)
 ونسمى قوات مكفوءة. وهكذا في الكميات المركبة. مثاله (ت + ب)^٤ (ت + ب)^٣
 (ت + ب)^٢ ١ (ت + ب) ١ $\frac{١}{٢}$ (ت + ب) $\frac{١}{٣}$ (ت + ب) $\frac{١}{٤}$ الى اخره. ولاجل سهولة
 الكتابة يُدَلُّ على القوات المكفوءة بدلائل سلبية. مثاله $\frac{١}{٢}$ او ت^{-١} = ت^{-١}
 وت^{-١} = $\frac{١}{٢}$ وت^{-٢} = $\frac{١}{٣}$ فتكون السلسلة ت^٤ ت^٣ ت^٢ ت^١ ت^{-١} ت^{-٢} ت^{-٣} ت^{-٤} الى اخره.
 اما جميع قوات الواحد فهي واحد لان ١ × ١ × ١ الى اخره
 ١ =

نبذة في الترقية

٧٦ اذا اردت ترقية كمية الى قوة مفروضة فاضربها في ذاتها مراراً تماثل
 الاحاد في دليل القوة المفروضة. فقوة ت^٤ الرابعة هي ت × ت × ت × ت = ت^٤
 وقوة ي^٥ السادسة = ي ي ي ي ي = ي^٥ وهكذا في الكمية المضلعة مثل ب ي
 فان مربعها اي (ب ي)^٢ = ب^٢ ي^٢ لان ب ي × ب ي = ب ب ي ي = ب^٢ ي^٢
 فنرى في كل كمية مضلعة او ذات اجزاء ان قوة حاصل الاجزاء تعادل حاصل

قواعدها. وهكذا (ب م ك) = ب^٢ م^٢ ك^٢ و (د س ي) = د^٢ س^٢ ي^٢ وقوة د ح
 ي الرابعة هي (د ح ي) = د^٤ ح^٤ ي^٤ وقوة ب^٤ الثالثة هي (ب^٤) او ب^٤ او ب^٤ او
 ب^٤ وقوة ب^٦ ت^٦ د^٦ التوتية هي (ب^٦ ت^٦ د^٦) او ب^٦ ت^٦ د^٦ وقوة ب^٢ م^٢ ي^٢
 الثالثة هي (ب^٢ م^٢ ي^٢) او ب^٢ م^٢ ي^٢ ٨ ي^٢

٧٧ الكمية المركبة ابي المرتبطة اجزاؤها بعلامات الجمع او الطرح تترقى
 بضرب اجزاها حسب قواعد الضرب. مثالها

$$(ت + ب)^1 = ت + ب \text{ اي القوة الاولى}$$

$$\frac{ت + ب}{ت + ب}$$

$$ت + ب + ب + ب$$

$$(ت + ب)^2 = ت^2 + ٢ ت ب + ب^2 = \text{القوة الثانية}$$

$$\frac{ت + ب}{ت^2 + ٢ ت ب + ب^2}$$

$$ت^2 + ٢ ت ب + ب^2 + ب + ب$$

$$(ت + ب)^3 = ت^3 + ٣ ت^2 ب + ٣ ت ب^2 + ب^3 = \text{القوة الثالثة}$$

$$ت + ب$$

$$ت^3 + ٣ ت^2 ب + ٣ ت ب^2 + ب^3 + ت + ب$$

$$ت^3 + ٣ ت^2 ب + ٣ ت ب^2 + ب^3 + ت + ب + ب + ب$$

$$(ت + ب)^4 = ت^4 + ٤ ت^3 ب + ٦ ت^2 ب^2 + ٤ ت ب^3 + ب^4 = \text{القوة الرابعة}$$

وهكذا الى اية قوة فُرِضَتْ

$$\text{مرّبع ت - ب هو ت}^2 - ٢ ت ب + ب^2$$

$$\text{كعب ت + ب هو ت}^3 + ٣ ت^2 ب + ٣ ت ب^2 + ب^3$$

$$\text{مرّبع ت + ب + ح هو ت}^2 + ٢ ت ب + ٢ ت ح + ب^2 + ٢ ب ح + ح^2$$

$$\text{ما هو كعب ت + د + ٢ هو ت}^3 + ٣ ت^2 د + ٣ ت د^2 + ٣ ت ٢ + ٣ د ٢ + ٣ د ٢ + ٢^3$$

$$\text{ما هي القوة الرابعة من ب + ٢ هو ت}^4 + ٤ ت^3 ب + ٦ ت^2 ب^2 + ٤ ت ب^3 + ب^4$$

ما هي القوة الخامسة من ك + ا

ما هي القوة السادسة من ا - ب

٧٨ مربعات الكميات الثنائية والفضلية كثيرة الوقوع في الاعمال الجبرية فيجب على المتعلم ان يعرف كيفية تربيعها معرفة جيدة. فاذا رتبنا ت + ب وت - ب يكون لنا

ت - ب

ت + ب

ت - ب

ت + ب

ت - ت

ت + ت

ت - ت

ت + ت

ت - ت

ت + ت

فترى في كليهما الجزء الاول والثالث مربعي ت وب والجزء الثاني مضاعف حاصل ت في ب فلنا من ذلك هذه القاعدة لتربيع هذه الكميات بدون الاستعانة بالضرب وهي

مربع كمية ثنائية كلا جزئيهما الجابيان يعدل مربع الجزء الاول مع مضاعف حاصل الجزئين مع مربع الجزء الثاني

مربع كمية فضلية يعدل مربع الجزء الاول الا مضاعف حاصل الجزئين مع مربع الجزء الثاني

فمربع ٢ ت + ب = ٤ ت + ٤ ت ب + ب

ومربع ح + ا = ح + ح + ح + ا

ومربع ت ب + س د = ت ت + ب ب + ٢ ت ب س د + س د

ومربع ٦ ي + ٢ = ٦ ي + ٢ ي + ٢ ي + ٢

ومربع ٢ د - ح = ٩ د - ٢ د ح + ح

ومربع ت - ا = ت - ٢ ت ا + ا

اما كيفية ترقية هذه الكميات الى القوت العليا فسياتي الكلام عليها في محله

٧٩ يكفي احيانا ان يدل على الترقية بدليل القوة المفروضة . فيقال في مربع
 ت + ب (ت + ب) وفي القوة النونية من ب س + ٨ + ك (ب س + ٨ +
 + ك) او ب س + ٨ + ك بحصر الكمية بين قوسين او تحت خط كما رايت .
 وان كان الجذر مضلعا بمحصر الضلعان معا او كل ضلع على حدته حسبما يستحسن .
 فيقال في مربع ت + ب \times س + د

(ت + ب) \times (س + د) او ت + ب \times س + د لان حاصل مربعي كيتين
 يعدل مربع حاصلهما (٧٦) ومتى انبسطت كمية محصورة برفع عنها القوسان او الخط .
 فان (ت + ب) اذا انبسطت نصيرت ٢ ت ب + ب

٨٠ اذا كان الجذر ايجابيا تكون القوات جميعها ايجابية واذا كان سلبيا تكون
 القوات الشفعية ايجابية والوترية سلبية كما يتضح مما قيل سابقا في فصل الضرب
 (٢٢) مثالة

القوة الثانية من - ت هي	ت +
القوة الثالثة	ت -
الرابعة	ت +
الخامسة	ت - الى اخره

اي كل قوة وترية لها علامة جذرها وكل قوة شفعية هي ايجابية ان
 كان جذرها سلبيا او ايجابيا

٨١ كل قوة تترقى الى قوة اعلى بضرب دليلها في دليل القوة المفروضة
 مثالة كعب ٢ = ٢×٢ = ٢ لان ٢ = ٢ ت وتكعب ٢ ت هو ٢ ت \times ت
 ت \times ت = ت = ت ت ت ت = ت اية القوة السادسة من ت او القوة
 الثالثة من ٢

القوة الرابعة من ٢ ت = ٢×٢ = ٢ ت ١ ب
 القوة الثالثة من ٤ ت = ٤ ت ٦ ك
 القوة الرابعة من ٢ ت \times ٢ ك = د = ١٦ ت \times ٨١ ك د

القوة الخامسة من $(ت + ب)^2 = (ب + ت)^1$

القوة النونية من $ت^2 = ت^1$

القوة النونية من $(ك - ي)^2 = (ك - ي)^1$

$(ت + ب)^2 = ت^2 + ٢ ت ب + ب^2$

$ت \times ب = ب \times ت$

$(ت ب ح)^2 = ت^2 ب ح + ت ب ح^2$

وهكذا في القوات التي دلائلها سلبية. مثالة القوة الثالثة من $ت^- = ت^- \times ٢$

$ت^- = (٧٥)$

القوة الرابعة من $ت^- ب^- = ت^- ب^- = ١٢$

كعب $٢ ك ي = ٨ ك ي = ٢٢$

مربع $ب ك = ب ك$

القوة النونية من $ك^- = ك^- = ٢٢$

٨٢ متى كانت العلامة المتقدمة على نفس الكمية سلبية يجب ان تجعل ايجابية

كلما صار الدليل شفعاً حسباً تقدم (٨٠) مثالة مربع $- ت^2 = + ت^2$ وكعب $- ت^3 = + ت^3$

ومربع $- ك^2 = + ك^2$

والقوة النونية من $- ت^2 = + ت^2$ اي $+ ت^2$ متى كانت ن دالة على عدد

شفع و $- ت^2$ متى دلت على عدد وتر

٨٣ الكسري ترقى بترقية صورته ومخرجه معاً. فربع $\frac{ت}{ب} = \frac{ت^2}{ب^2}$ لان

$\frac{ت}{ب} \times \frac{ت}{ب} = \frac{ت ت}{ب ب} = \frac{ت^2}{ب^2}$

القوة الثانية من $\frac{١}{ت} = \frac{١}{ت} = \frac{١}{ت}$ وقوته الثالثة $= \frac{١}{ت^2}$ وقوته النونية $= \frac{١}{ت^n}$

كعب $\frac{٢ ك ر}{٢٧ ي} = \frac{٢ ك ر^3}{٢٧ ي^3}$

القوة النونية من $\frac{ك}{ت ي} = \frac{ك}{ت ي} = \frac{ك}{ت ي}$

وهكذا اذا كانت العلامة في الصورة ايجابية وفي المخرج سلبية مثاله $\frac{ت ك}{ب} =$

$$\frac{ت}{ب ك} = \frac{ان ك}{هو مكفو ك} = \frac{اي ك}{ك} = \frac{ا}{ب ك} = \frac{ح}{ب} = \frac{ح ي}{ب}$$

$$\frac{ت د}{ك ي} = \frac{ت ي}{ك د}$$

فاذا يمكن ان يرفع مخرج كسر بالكلية او ان نجعل الصورة واحداً بدون تغيير

$$قيمة العبارة. مثاله $\frac{ت}{ب} = \frac{ا}{ب ت} = \frac{اوت ب}{ب ت}$$$

$$\frac{ك}{ب ن} = \frac{ا}{ك ب ن} = \frac{ا}{ب ن ك}$$

$$\frac{ك ت ن}{ب ن س} = \frac{ا}{ب ن ت ك س} = \frac{اوس ك ت}{ب ن س}$$

نبذة في جمع القوات وطرحها

١٥ تجمع القوات بكتابتها متوالية مع علاماتها. فجميع ت وب هوت +

ب + ومجميع ت - ب و ح - د هوت - ب + ح - د

واذا كانت الاحرف والقوات متشابهة تجمع مسمياتها او تطرح حسب قواعد

الجميع (١٦ و ١٧) مثاله

جميع ت^٢ و ت^٣ هوت

٢ ت ^٢ ن	٢ ب ^٢	٢ - ك ^٢ ي
٧ ت ^٢ ن	٦ ب ^٢	٢ - ك ^٢ ي
٤ ت ^٢ ن		الجميع ٥ - ك ^٢ ي

٣ (ت + ي) ن	٥ ت ^٢ ح
٤ (ت + ي) ن	٦ ت ^٢ ح
٧ (ت + ي) ن	الجميع

ولكن الاحرف الغير المتشابهة او القوات الغير المتشابهة من حرف واحد

لا تجمع الا بكتابتها متوالية مع علاماتها كما تقدم. فجميع ت^٢ و ت^٣ هوت + ت^٢

ومجموع ث^١ ب^١ و ٢ ث^١ ب^١ هو ث^١ ب^١ + ٢ ث^١ ب^١

٨٦ طرح القوت كجملها غير انه يجب تبديل علامة المطروح من + الى - او عكسه حسبما تقدم في باب الطرح. مثاله

من	٢ ث ^١	- ٢ ب ^١	٢ ح ^١ ب ^١
اطرح	- ٦ ث ^١	٤ ب ^١	٤ ح ^١ ب ^١
الفضلة	٨ ث ^١		- ٤ ح ^١ ب ^١

من	٢ ث ^١ ب ^١	٥ (ث - ح) ب ^١
اطرح	٢ ث ^١ ب ^١	٢ (ث - ح) ب ^١
		٢ (ث - ح) ب ^١

نبذة في ضرب القوت

٨٧ نضرب القوت بكتابتها متوالية حسبما تقدم في فصل الضرب. فحاصل
ث^١ في ب^١ هو ث^١ ب^١ وك^١ × ث^١ = ك^١ ث^١ و ٢ ث^١ ي^١ × - ٢ ك^١ = - ٦ ث^١ ي^١ ك^١

٨٨ قوت الجذر الواحد نضرب بجمع دلائلها. مثاله

ث^١ × ث^١ = ث^١ لأن ث^١ × ث^١ = ث^١ ث^١ ث^١ ث^١ = ث^١ ث^١ ث^١ ث^١ وهكذا
ث^١ × ث^١ = ث^١ وك^١ × ك^١ = ك^١ و ٤ ث^١ × ٢ ث^١ = ٨ ث^١ و ٢ ك^١ × ٢ ك^١ = ٤ ك^١
٢ ك^١ × ٦ ك^١ = ١٢ ك^١ وب^١ ي^١ × ب^١ ي^١ = ب^١ ي^١ و (ب + ح - ي) × (ب + ح - ي) = (ب + ح - ي)^٢

اضرب ك^١ + ك^١ ي^١ + ك^١ ي^١ × ك^١ - ي^١

الجواب ك^١ - ي^١

اضرب ٤ ك^١ ي^١ + ٢ ك^١ ي^١ - ١ × ٢ ك^١ - ك^١

اضرب ك^١ + ك^١ - ٥ × ٢ ك^١ + ك^١ + ١

وهكذا ان كانت الدلائل سلبية. مثاله

ث^١ × ث^١ = ث^١ و ي^١ × ي^١ = ي^١ و - ٢ ث^١ × - ٢ ث^١ = ٤ ث^١

$$\text{وت}^{\text{ر}} \times \text{ت}^{\text{ر}} = \text{ت}^{\text{ن}} \times \text{ت}^{\text{م}} = \text{ت}^{\text{ن}} \times \text{وي}^{\text{ر}} \times \text{ي}^{\text{ر}} = \text{ي}^{\text{ر}} = 1$$

٨٩ اذا ضربت ت + ب في ث - ب يكون الحاصل ت^ر - ب^ر ولنا من ذلك قضية عمومية وهي

ان حاصل مجتمع كيتين في فضلتهما يعدل فضلة مربعيهما

$$(\text{ت} - \text{ي}) \times (\text{ت} + \text{ي}) = \text{ت}^{\text{ر}} - \text{ي}^{\text{ر}}$$

$$(\text{ت} - \text{ي}^{\text{ر}}) \times (\text{ت}^{\text{ر}} + \text{ي}^{\text{ر}}) = \text{ت}^{\text{ن}} - \text{ي}^{\text{ن}}$$

$$(\text{ت}^{\text{ن}} - \text{ي}^{\text{ن}}) \times (\text{ت}^{\text{م}} + \text{ي}^{\text{م}}) = \text{ت}^{\text{و}} - \text{ي}^{\text{و}} \text{ الى اخره}$$

نبذة في قسمة القوات

٩٠ نقسم القوات مثل ما سواها من الكميات. اي بان يخرج من المقسوم كمية تماثل المقسوم عليه او بكتابتها على هيئة كسرٍ دارجي. مثاله

$$\text{ت}^{\text{ر}} \text{ ب}^{\text{ر}} \div \text{ت}^{\text{ر}} \text{ ب}^{\text{ر}} = \text{ت}^{\text{ر}} \text{ ب}^{\text{ر}} \text{ او } \frac{\text{ت}^{\text{ر}} \text{ ب}^{\text{ر}}}{\text{ت}^{\text{ر}} \text{ ب}^{\text{ر}}}$$

اقسم ٩ ت ^ر ي ^ر	١٢ ب ^ر ك ^ن	ت ^ر ب ^ر + ٢ ت ^ر ي ^ر
على - ٢ ت ^ر	٢ ب ^ر	ت ^ر
الخارج - ٢ ي ^ر		ب ^ر + ٢ ي ^ر

اقسم د × (ت - ح + ي) ^ر
على (ت - ح + ي) ^ر
الخارج د

٩١ القسمة عكس الضرب. وعلى ذلك نقسم قوات جذرٍ واحدٍ بطرح دليل المقسوم عليه من دليل المقسوم. مثاله

$$\text{ت}^{\text{و}} \div \text{ت}^{\text{ر}} = \text{ت}^{\text{ر}} \text{ لان } \frac{\text{ت}^{\text{و}}}{\text{ت}^{\text{ر}}} = \frac{\text{ت}^{\text{و}} \text{ ت}^{\text{ن}} \text{ ت}^{\text{م}} \text{ ت}^{\text{ن}}}{\text{ت}^{\text{ن}} \text{ ت}^{\text{م}} \text{ ت}^{\text{ن}} \text{ ت}^{\text{ر}}} = \text{ت}^{\text{و}} \text{ ت}^{\text{ن}} = \text{ت}^{\text{و}} \text{ وي}^{\text{ر}} + \text{وي}^{\text{ر}} \text{ ي}^{\text{ر}} = \text{وي}^{\text{ر}} \text{ ي}^{\text{ر}} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{دليل الجذر خارج القوسين او فوق الخط. مثالة } \sqrt[4]{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \\ (\sqrt[4]{\frac{1}{2}})^2 = \sqrt[2]{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \\ \sqrt[4]{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \\ \sqrt[4]{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

نبذة في التجذير

٩٨ اذا اردت ان نجد جذر كمية فاقسم دليلها على دليل الجذر المطلوب او

اجعل علامة الجذر مع دليله فوق الكمية. مثالة جذر $\sqrt[2]{\frac{1}{2}}$ الكعي $= \sqrt[2]{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

جذر $\sqrt[2]{\frac{1}{2}}$ الكعي هو $\sqrt[2]{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

جذر $\sqrt[2]{\frac{1}{2}}$ ب الخامس $= \sqrt[2]{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

جذر $\sqrt[2]{\frac{1}{2}}$ النوي $= \sqrt[2]{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

جذر $\sqrt[2]{\frac{1}{2}}$ د - ك السابع $= \sqrt[2]{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

جذر $\sqrt[2]{\frac{1}{2}}$ - ك الخامس $= \sqrt[2]{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

جذر $\sqrt[2]{\frac{1}{2}}$ الكعي $= \sqrt[2]{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

جذر $\sqrt[2]{\frac{1}{2}}$ الرابع $= \sqrt[2]{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

جذر $\sqrt[2]{\frac{1}{2}}$ الكعي $= \sqrt[2]{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

جذر $\sqrt[2]{\frac{1}{2}}$ النوي $= \sqrt[2]{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

٩٩ حسب القاعدة السابقة نجد الجذر الكعي للجذر المائي بقسمة $\frac{1}{2}$ على ٢

وذلك مثل الضرب في $\frac{1}{2}$ حسبا تقدم في فصل ضرب الكسر (٥٤) لان $\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{1} = 1$ وهكذا $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{1} = 1$ فاذا الجذر المهي

للجذر النوي من $\sqrt[2]{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ اي $\sqrt[2]{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ فقد

نحول الدليلان الى واحد

وبالعكس يمكن تحويل الدليل الواحد الى اثنين. مثالة $\sqrt[2]{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

حصلت القوة من ضرب كميات معروفة علاماتها. واما الثالثة فلانه لا يمكن استخراج جذر شفعي لكيفية سلبية. فـ جذر - ت ليس هو + ت ولا - ت لان + ت × + ت = + ت و - ت × - ت = + ت فسمي الجذر الشفعي لكيفية سلبية كمية وهمية او محالية. ولكن قد تستعمل هذه الكميات الوهمية في الاعمال الجبرية لانها ببعض المعاملات نصير ممكنة. مثالة $\sqrt{-6} \times \sqrt{-6} = -6$ ت وهي ممكنة. ويجب هنا ان يعتبر في الجذور الوهمية ان علامة السلب واقعة تحت علامة الجذر كما مثلنا. ولكن $\sqrt{-6} - \sqrt{-6} \times \sqrt{-6} = \sqrt{-6}$ ت ومن فوايد هذه الكميات الوهمية ايضاً الدلالة على فساد مسئلة. فلو قيل اقسام ١٤ الى قسمين حاصلها ٦٠ قيل ليكن احدهما ك والاخر ١٤ - ك فلناك $\times (١٤ - ك) = ٦٠$ اي ١٤ ك - ك^٢ = ٦٠ ويتحول هذه المعادلة حسب القواعد الاتية لنا ك = $٧ \pm \sqrt{١١}$ وهذه كمية وهمية غير ممكنة. فالمسئلة فاسدة اي لا يمكن انقسام ١٤ الى قسمين حاصلها ٦٠ وقس على ذلك

١٠٣ كيفية تجذير الكميات المركبة سيأتي الكلام عليها في بعض الفصول الاتية. واما هنا فلا ننظر الا الى كيفية استعمال الجذر المالى لمربعات الكميات الثنائية والفضلية وهذه المربعات لا يكون لها اكثر من ثلاثة اجزاء كما راينا (٧٨) مثالها ت^٢ + ت ب + ب^٢ وفي الفضلية ت^٢ - ت ب + ب^٢ فنجيبا راينا كمية مثل هذه جزءان منها قوتان تامتان والاخر حاصل جذري هاتين القوتين علنا انها مربع كمية ثنائية او فضلية. ولنا لاستعلام جذرها هذه القاعدة

خذ جذر الجزء الاول والثالث واربطهما بعلامة الجزء الاوسط

فلو قيل ما هو جذر ك^٢ + ١ + ك لبقيل جذر الجزء الاول اي ك^٢ = ك وجذر الجزء الثالث اي واحد = ١ وعلامة الجزء الاوسط هي + فاذا الجذر ك + ١

$$\text{جذر ك}^2 - ١ + ك = ك - ١$$

$$\text{جذر ت}^2 + ت + \frac{١}{٤} = ت + \frac{١}{٤}$$

$$\text{جذر ت}^2 + ت + \frac{٤}{٩} = ت + \frac{٢}{٣}$$

$$\text{جذرت}^{\frac{1}{2}} + \text{ت}^{\frac{1}{2}} = \frac{\text{ب}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{\text{ب}}{\frac{1}{2}}$$

$$\text{جذرت}^{\frac{1}{2}} + \frac{\text{ت}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{\text{ب}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{\text{ت}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{\text{ب} + \text{ت}}{\frac{1}{2}}$$

١٠٤ كل جذر لا يمكن أن يُبدل عليه تمامًا بالأعداد يقال له اصم. مثاله $\sqrt[3]{6}$ فهذا لا يمكن الوصول إليه تمامًا وهو بالكسر العشري 1.91256 تقريبًا. وكل جذر ليس اصم فهو منطوق ولكن في ما يأتي تُطلق هذه اللفظة على كل كمية ليس لها علامة الجذر ولا دليل كسري

نبذة في تحويل الجذور

١٠٥ أولاً إذا أردت تحويل كمية منطقة الى هيئة كمية جذرية فرفها الى القوة من اسم الجذر المفروض ثم اجعل لها علامة الجذر مع دليله. فلو قبل حوّل ت الى هيئة الجذر النوني لقبل قوتها النونية = $\text{ت}^{\frac{1}{2}}$ ثم انها بوضع علامة الجذر والدليل نصير $\text{ت}^{\frac{1}{2}}$ = $\text{ت}^{\frac{1}{2}}$ فقد تحولت الى هيئة كمية جذرية بدون تغيير قيمتها لان $\text{ت}^{\frac{1}{2}} = \text{ت}^{\frac{1}{2}} = \text{ت}^{\frac{1}{2}}$

حوّل ٤ الى هيئة الجذر الكعبي الجواب $\sqrt[3]{64}$ او $\sqrt[3]{(٦٤)}$

حوّل ٣ ت الى هيئة الجذر الرابع الجواب $\sqrt[4]{٨١ ت}$

حوّل $\frac{1}{2} \text{ت}^{\frac{1}{2}}$ الى هيئة الجذر المائى الجواب $(\frac{1}{2} \text{ت}^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$

حوّل $٣ \times \text{ت} - \text{ك}$ الى هيئة الجذر الكعبي الجواب $\sqrt[3]{٢٧ \text{ت}^٣ - \text{ك}^٣}$

حوّل $\text{ت}^{\frac{1}{2}}$ الى هيئة الجذر الكعبي الجواب $\sqrt[3]{\text{ت}^{\frac{3}{2}}}$

حوّل $\text{ت}^{\frac{1}{2}}$ الى هيئة الجذر النوني

١٠٦ ثانياً لكي تحول كميات دلالتها مختلفة الى دلائل مشتركة بدون تغيير

القيمة

(١) حوّل الدلائل الى مخرج مشترك

(٢) رَقَّ كل كمية الى القوة المدلول عليها بصورة دليلها بعد

تحويله

(٢) اجعل للجميع علامة الجذر المدلول عليه بالخرج المشترك

مثاله لو قيل حول ت ب الى دليل مشترك ل قيل ب و بالتحويل الى مخرج مشترك = ب و ثم بتريفة ت الى القوة المدلول عليها بصورة الدليل نصير ت و هكذا ب نصير ب والجذر دليله فلنا ب و ب والقيمة لم تتغير لان ت = ب = ت = ت وهكذا ب = ب = ب

حول ت ب ك الى دليل مشترك الجواب ت و (ب ك)

حول ت و ب ن الى دليل مشترك الجواب ت ن و ب ن

حول ك ن و ي الى دليل مشترك الجواب ك ن و ي ن

حول ب و الى دليل مشترك الجواب ب و

حول (ت + ب) و (ك - ي) الى دليل مشترك الجواب (ت + ب) و (ك - ي)

و (ك - ي)

حول ت ب و ب الى دليل مشترك

حول ك و ب الى دليل مشترك

١٠٧ اذا اريد تحويل كمية الى ذات دليل مفروض فاقسم دليلها

على الدليل المفروض واكتب الخارج عن يسار الكمية ثم اجعل فوق

الكل الدليل المفروض

فلو قيل حول ت الى دليل ل قيل ب + ب = ب فلنا ب

حول ت و ك الى دليل الجواب (ت) و (ك)

حول ب و الى دليل الجواب (ب) و (ب)

١٠٨ ثالثاً اذا اردت ان تخرج بعض كمية من تحت علامة الجذر فحلّ الكمية الى ضلعين احدهما قوة تامة من اسم الجذر وخذ جذر هذا الضلع واكتبه قدام الضلع الاخر وعلامة الجذر بينهما. وهذه القاعدة مبنية على ما تقدم (١٠٠) من ان جذر حاصل كميتين يعدل حاصل جذريهما. وان لم يمكن حل الكمية الى ضلعين احدهما قوة تامة من اسم الجذر فلا يمكن اخراج شي منها من تحت علامة الجذر.

فلو قبل اخراج بعض $\sqrt{16}$ من تحت علامة الجذر لقبل $\sqrt{8}$ بنقل الى ضلعين $\sqrt{2}$ و $\sqrt{4}$ واحدهما قوة تامة من اسم الجذر اي $\sqrt{2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2}$ فلهذا $\sqrt{16} = \sqrt{4} \times \sqrt{2}$ وعلى هذه الكيفية نفعل هذه الامثلة

$$\sqrt{16} = \sqrt{4} \times \sqrt{2}$$

$$\sqrt{16} = \sqrt{4} \times \sqrt{2}$$

$$\sqrt{16} = \sqrt{4} \times \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{2}}{\sqrt{4}}$$

$$\sqrt{4} = \sqrt{4} \times \sqrt{2}$$

$$\sqrt{4} = \sqrt{4} \times \sqrt{2}$$

$$\sqrt{4} = \sqrt{4} \times \sqrt{2}$$

$$\sqrt{4} = \sqrt{4} \times \sqrt{2}$$

$$\sqrt{4} = \sqrt{4} \times \sqrt{2}$$

١٠٩ ثم بعكس هذا العمل يدخل مسمى كمية جذرية تحت علامة الجذر اي يترقى الى قوة من اسم الجذر ثم يضرب في الاجزاء الواقعة تحت علامة الجذر

$$\sqrt{4} = \sqrt{4} \times \sqrt{2}$$

$$\sqrt{4} = \sqrt{4} \times \sqrt{2}$$

$$٢٢ ب (٢٢ ب ٢) = ١٢ (١٦ ت ٤ ب ٢)$$

$$\frac{١}{٢} \left(\frac{٢٢ ب ٢ س}{٢٢ ب + ٢ ب ٢} \right) = \frac{١}{٢} \left(\frac{٢٢ ب ٢ س}{٢٢ ب + ٢ ب ٢} \right)$$

نبتة في جمع الجذور وطرحها

١١٠ نجمع الجذور وكغيرها من الكميات بكتابتها متوالية مع علاماتها. فنجتمع

٢٢ ت و ٢٢ ب هو ٢٢ ت + ٢٢ ب وان تشابهت الكميات والدلائل فاجمع المسميات واكتب الاجزاء الجذرية عن يسار المجتمع. مثالة

$$٢٢ ت و ٢٢ ب = ٢٢ ت$$

٢٢ ت	٢ (ك + ح) ١	٢٢ ت
٢٢ ت -	٤ (ك + ح) ١	٢٢ ت
	٧ (ك + ح) ١	٢٢ ت المجتمع

٢٢ ت - ح	٥ ب ح ١
٢٢ ت - ح	٧ ب ح ١
٢٢ ت × (٢٢ ت - ح)	

١١١ في بعض الاحيان يجب اخراج بعض الكميات من تحت علامة الجذر

لكي نجمع. مثالة ٢٢ ت + ٢٢ ب = ٢٢ ت باخراج بعضها من تحت علامة الجذر = ٢٢ ت + ٢٢ ب

$$٢٢ ت = ٢٢ ب$$

$$\text{اجمع } ٢٢ ت و ٢٢ ب \quad \text{الجواب } ٢٢ ت + ٢٢ ب = ٢٢ ت$$

$$\text{اجمع } ٢٢ ت و ٢٢ ب \quad \text{الجواب } ٢٢ ت + ٢٢ ب = ٢٢ ت$$

$$\times ٢٢ ت$$

$$\text{اجمع } (٢٢ ت ٢) و (٢٢ ت ٢) \quad \text{الجواب } (٢٢ ت + ٢) \times ٢٢ ت$$

$$\text{اجمع } ٢٢ ت و ٢٢ ت$$

ت ^٢	دك	اضرب م + م
ك ^١	حى	م - م
(ت ^٢ ك ^١)		المحصل م - م ^٢

$\begin{array}{r} \text{ت} \frac{1}{\text{ن}} \\ \text{ك} \frac{1}{\text{ن}} \\ \hline (\text{ت} \frac{1}{\text{ن}} \text{ك} \frac{1}{\text{ن}}) \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{اضرب} \quad (\text{ت} + \text{ي}) \frac{1}{\text{ن}} \\ \text{في} \quad (\text{ب} + \text{ح}) \frac{1}{\text{ن}} \\ \hline \text{المحاصل} \end{array}$
---	--

اضرب $\sqrt[3]{8}$ في $\sqrt[3]{27}$ الجواب $\sqrt[3]{162}$ $\sqrt[3]{27} = 3$ $\sqrt[3]{8} = 2$

١١٤ تُضْرَبُ جذور كمية واحدة بجمع دلائلها بعد تحويلها الى مخرج مشترك.

مثالہ ۱: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

$$\begin{array}{r}
 \text{اضرب } 2 \text{ ي } \frac{1}{4} \\
 \text{في } \frac{1}{2} \\
 \hline
 \text{الحاصل } 2 \text{ ي } \frac{11}{12}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \text{ت } \frac{1}{2} \times \text{ت } \frac{1}{4} \\
 \hline
 \text{ت } \frac{1}{8}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 (\text{ت} + \text{ب}) \frac{1}{2} \\
 (\text{ت} + \text{ب}) \frac{1}{4} \\
 \hline
 (\text{ت} + \text{ب}) \frac{3}{4}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} - \text{ك} \\ \frac{1}{4} - \text{ك} \\ \hline \frac{1}{12} - \text{ك} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \frac{1}{2} \text{ اضرب (ت - ي) ن} \\ \frac{1}{4} \text{ في (ت - ي) ر} \\ \hline \text{الاحصا} \end{array}$$

$$\frac{1}{1}y = \frac{2}{1} - \frac{2}{1}y = \frac{1}{1} - y \times \frac{1}{1}y$$

$$1 = \frac{1}{y} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}y = \frac{1}{n} - y \times \frac{1}{n}y$$

$$1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 - 0 = 0 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - 0$$

١١٥ وهكذا تُضْرَبُ القَوَاتُ فِي الجُذُورِ. مثَالُهُ $t' \times t^{\frac{1}{2}} = t^{\frac{3}{2}}$

$$ت + م١ \times ١ + ر م١ = ت + م١ + ت ر م١ + ر ي$$

$$\text{اضرب م١ في م١} \quad \text{الجواب م١ ت ر ب}$$

$$\text{اضرب م١ في م١} \quad \text{الجواب م١ ت ر ب}$$

$$\text{اضرب م١ في م١} \quad \text{الجواب م١ ت ر ب}$$

$$\text{اضرب م١ في م١} \quad \text{الجواب م١ ت ر ب}$$

$$\text{اضرب م١ في م١} \quad \text{الجواب م١ ت ر ب}$$

$$\text{اضرب ت ر ت - ك في (س - د) \times (ت ك - ت ك) في (س - د)}$$

$$\text{الجواب (ت س - ت د) \times (ت ك - ت ك) في (س - د)}$$

نبذة في قسمة الجذور

١١٨ يدل على قسمة الجذور بكتابتها على هيئة كسرٍ دارجي. مثالة

$$\text{الخارج من قسمة م١ ت على م١ ب} = \frac{\text{م١ ت}}{\text{م١ ب}} \text{ او بوضع علامة واحدة للصورة والخارج}$$

$$\text{مثالة} \quad \frac{\text{ن ت}}{\text{م ب}}$$

واذا كان جذر المقسوم والمقسوم عليه من اسم واحد تم القسمة كما في غيرها

وبوضع الخارج تحت علامة الجذر المشترك. مثالة

$$\text{ن ت ب على م١ ت} = \frac{\text{ن ت ب}}{\text{م١ ت}} \text{ و (ك ي) على ي} = \frac{\text{ك ي}}{\text{ي}} \text{ و (ك ي) على ي} = \frac{\text{ك ي}}{\text{ي}} \text{ و (ك ي) على ي} = \frac{\text{ك ي}}{\text{ي}}$$

$$\text{(ت + ت ك) في (ك)}$$

$$\text{ت}$$

$$\text{(ت + ت ك) في (ك)}$$

$$\text{م د ح ك}$$

$$\text{م د ك}$$

$$\text{م د ك}$$

$$\text{اقسم م١ ت ك}$$

$$\text{على م١ ك}$$

$$\text{الخارج م١ ت ك}$$

اقسم (ت ح) $\frac{1}{2}$	(ت ي) $\frac{1}{2}$
على (ت ك) $\frac{1}{2}$	(ت ي) $\frac{1}{2}$
الخارج	(ت ي) $\frac{1}{2}$

١١٩ نُسَمَّ جذور كَيْفٍ واحدٍ بطرح دليل المقسوم عليه من دليل المقسوم.
مثالُهُ ت $\frac{1}{2}$ + ت $\frac{1}{2}$ = ت $\frac{1}{2}$ - ت $\frac{1}{2}$ = ت $\frac{1}{2}$

اقسم (٢ ت) $\frac{11}{12}$	(ت ك) $\frac{2}{3}$	ت $\frac{1}{2}$ + ن $\frac{1}{2}$
على ت $\frac{1}{2}$	(ت ك) $\frac{1}{2}$	ت $\frac{1}{2}$
الخارج (٢ ت) $\frac{1}{2}$		ت $\frac{1}{2}$

اقسم (ب + ي) $\frac{2}{3}$	(ر ي) $\frac{1}{2}$
على (ب + ي) $\frac{1}{2}$	(ر ي) $\frac{1}{2}$
الخارج	(ر ي) $\frac{2}{3}$

وهكذا في قسمة الجذور على القوت او عكسها. مثالُهُ ت $\frac{1}{2}$ + ت $\frac{1}{2}$ = ت $\frac{1}{2}$ - ت $\frac{1}{2}$ = ت $\frac{1}{2}$ ون $\frac{1}{2}$ + ي $\frac{1}{2}$ = ي $\frac{1}{2}$ - ن $\frac{1}{2}$ =

١٢٠ بعد تحويل الجذور الى دليل مشترك ان كان لها مسميات منطقة نُسَمَّ اولاً وبوضع الخارج قدام الخارج من قسمة الجذور. مثالُهُ ت س م ب د على
ت م ب = س م د

اقسم ٢٤ ك م ت ي	١٨ د ح م ب ك	ب م ك ي
على ٦ م ت	٢ ح م ك	م ي
الخارج ٤ ك م ي		ب م ك

اقسم ب ي (ت ك) $\frac{1}{2}$	١٦ م ٢٣
على ي (ت ك) $\frac{1}{2}$	٨ م ٤
الخارج ب (ت ك) $\frac{1}{2}$	

حوّل $\frac{2}{3}$ الى كسرية مخرجة منطق

حوّل $\frac{\text{ث} - \overline{\text{ب}}}{\text{ت} + \overline{\text{ب}}}$ الى كسرية مخرجة منطق

١٢٧ نرى ما تقدم ان استخراج جذر كمية صماء كسراً يسهل بتحويل الصورة او المخرج الى كمية منطق. فلا يلزم حينئذ سوى استخراج جذر احدهما اذ يكون الاخر

منطقاً. مثاله جذر $\frac{\text{ت}}{\text{ب}}$ المال $\frac{\text{ت}}{\text{ب}} = \frac{\overline{\text{ت}}}{\overline{\text{ب}}} = \frac{\text{ت}}{\overline{\text{ب}} + \text{ب}}$ او $\frac{\overline{\text{ت}}}{\overline{\text{ب}}}$

جذر $\frac{2}{7}$ المال $\frac{2}{7} = \frac{\overline{2}}{\overline{7}} = \frac{\overline{2}}{\overline{7} \times \overline{7} + 7} = \frac{\overline{2}}{71}$

امثلة

- (١) ما هو الجذر الرابع من $\text{ا}^8 \text{ب}^2$
- (٢) ما هو الجذر السادس من $(\text{ب} + \text{ت})^3$
- (٣) ما هو الجذر الثوبى من $(\text{ك} - \text{ى})^{\frac{1}{2}}$
- (٤) ما هو الجذر الكعبى من $125 \text{ا}^3 \text{ك}^3$
- (٥) ما هو الجذر المالى من $\frac{4 \text{ت}^4}{9 \text{ا}^2 \text{ى}^2}$
- (٦) ما هو الجذر الخامس من $\frac{22 \text{ت}^3 \text{ك}^3}{243}$
- (٧) ما هو الجذر المالى من $\text{ك}^2 - 6 \text{ب} + 9 \text{ب}^2$
- (٨) ما هو الجذر المالى من $\text{ت}^2 + \text{ت} \text{ى} + \frac{\text{ى}^2}{4}$
- (٩) حوّل $\text{ا}^3 \text{ك}^2$ الى هيئة الجذر السادس
- (١٠) حوّل 2ى^3 الى هيئة الجذر الكعبى
- (١١) حوّل $\text{ا}^2 \text{ت}^2$ الى دليل مشترك
- (١٢) حوّل $\frac{4}{5} \text{ا}^2 \text{و}^2$ الى دليل مشترك

- (١٣) حوّل $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ الى دليل $\frac{1}{8}$
- (١٤) حوّل $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ الى دليل $\frac{1}{8}$
- (١٥) اخرج بعض $\frac{1}{2}$ من تحت علامة الجذر
- (١٦) اخرج بعض $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{4}$ من تحت علامة الجذر
- (١٧) ما هو مجتمع $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{8}$ و فضلتهما
- (١٨) ما هو مجتمع $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{8}$
- (١٩) اضرب $\frac{1}{2}$ في $\frac{1}{8}$ في $\frac{1}{5}$
- (٢٠) اضرب $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$
- (٢١) اضرب $\frac{1}{2}$ (ت + $\frac{1}{4}$) \times $\frac{1}{4}$ (ت - $\frac{1}{8}$)
- (٢٢) اضرب $\frac{1}{2}$ (ت + $\frac{1}{4}$) \times $\frac{1}{5}$ (ت + $\frac{1}{8}$)
- (٢٣) اقسم $\frac{1}{2}$ على $\frac{1}{8}$
- (٢٤) اقسم $\frac{1}{4}$ على $\frac{1}{8}$
- (٢٥) اقسم $\frac{1}{2}$ على $\frac{1}{8}$
- (٢٦) اقسم $\frac{1}{8}$ على $\frac{1}{4}$
- (٢٧) ما هو مكعب $\frac{1}{2}$
- (٢٨) ما هو مربع $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
- (٢٩) ما هي القوة الرابعة من $\frac{1}{2}$
- (٣٠) ما هو مكعب $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$
- (٣١) بماذا تصير $\frac{1}{2}$ منطق
- (٣٢) بماذا تصير $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ منطق
- (٣٣) حوّل $\frac{1}{2}$ الى مخرج منطق

$$(٣٤) \text{ حوّل } \frac{٦٢}{٣٢ \times ٧٢} \text{ الى مخرج منطّقى}$$



الفصل العاشر

في حلّ المعادلات بالترقية والتجذير

نبذة

في الترقية

١٢٨ لو فرض $\sqrt{ك} = ت$ لكان بتربيع جانبي هذه المعادلة $ك = ت^2$ فإذا ان وقعت الكمية المجهولة تحت علامة الجذر فنحلّ المعادلة بترقية جانبيها الى فوق من اسم ذلك الجذر

تنبيه قبل الترقية ينبغي مقابلة المعادلة حتى تكون الكميات المنطقّة وحدها على جانب واحد والجذرية وحدها على الجانب الاخر

$$\sqrt{ك} = ٤ + ٩ \quad \text{فلنفرض هذه المعادلة}$$

$$\sqrt{ك} = ٩ - ٤ = ٥ \quad \text{ثم بالمقابلة}$$

$$ك = ٢٥ = ٢٥ \quad \text{بترقية الجانبيين}$$

$$ت + \sqrt{ك} = ب - د \quad \text{مفروض}$$

$$\sqrt{ك} = د + ب - ت \quad \text{بالمقابلة}$$

$$ك = (د + ب - ت)^2 \quad \text{بالترقية}$$

$$\sqrt{ك} = ١ + ٤ \quad \text{مفروض}$$

$$٦٤ = ١ + ك \quad \text{بترقية الجانبيين الى القوة الثالثة}$$

$$ك = ٦٣ \quad \text{وبالمقابلة}$$

$$\frac{1}{3} + 6 = \sqrt{4 - ك} \quad \text{مفروض}$$

$$12 = \sqrt{4 - ك} \quad \text{بالجبر}$$

$$\frac{0}{6} = \sqrt{4 - ك} \quad \text{بالمقابلة والقسمة على 6}$$

$$2 + \frac{20}{36} = \sqrt{4 - ك} \quad \text{بالتربية}$$

$$\frac{2+2}{\sqrt{4-ك}} = \frac{2}{\sqrt{4-ك}} \quad \text{مفروض}$$

$$2 + 2 = \sqrt{4 - ك} \quad \text{بالجبر}$$

$$4 = \sqrt{4 - ك} \quad \text{بالمقابلة}$$

$$4 = \sqrt{4 - ك} \quad \text{بالتربية}$$

وعلى هذا النسق نخضع هذه الامثلة الآتية

$$\frac{261}{100} = ك \quad 6 = \frac{4}{0} - \sqrt{2 + ك}$$

$$20 = ك \quad 8 = \frac{ك}{0}$$

$$12 = ك \quad 7 = 4 + \frac{1}{3}(2 + ك)$$

$$4 = ك \quad \sqrt{ك} + 2 = \sqrt{ك + 12}$$

$$\frac{20}{16} = ك \quad \frac{1}{3} - \sqrt{ك} = \sqrt{ك}$$

$$\frac{9}{30} = ك \quad \sqrt{5ك} + 2 = \sqrt{2 + ك} \times \sqrt{5ك}$$

$$\frac{1}{1-ك} = ك \quad \frac{\sqrt{ك}}{ك} = \frac{ك-ك}{ك}$$

$$4 = ك \quad \frac{28 + \sqrt{ك}}{6 + \sqrt{ك}} = \frac{28 + \sqrt{ك}}{4 + \sqrt{ك}}$$

$$\text{مفروض ت} + \frac{\text{ك}}{\text{ب}} = \text{ح} - \frac{\text{ك}}{\text{د}}$$

$$\text{بالحبر والمقابلة والقسمة ك} = \frac{\text{ب د ح} - \text{ت ب د}}{\text{ب} + \text{د}}$$

$$\text{وبالتجذير ك} = \sqrt{\frac{\text{ب د ح} - \text{ت ب د}}{\text{ب} + \text{د}}}$$

$$\text{مفروض ت} + \text{د ك} = ١٠ - \text{ك ن}$$

$$\text{بالمقابلة والقسمة ك} = \frac{\text{ت} - ١٠}{١ + \text{د}}$$

$$\text{بالتجذير ك} = \sqrt{\frac{\text{ت} - ١٠}{١ + \text{د}}}$$

١٣٠ متى كانت المجهولة قوةً تحت علامة الجذر فنقل المعادلة بالترقية والتجذير

$$\text{مفروض} \quad \sqrt{\text{ك}} = \text{ك}^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{بالترقية} \quad \text{ك} = \text{ك}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\text{ك}}$$

$$\text{بالتجذير} \quad \text{ك} = \sqrt{\sqrt{\text{ك}}} = \sqrt[4]{\text{ك}}$$

$$\text{مفروض} \quad \sqrt{\text{ك} - \text{ت}} = \text{ح} - \text{ك}$$

$$\text{بالترقية} \quad \text{ك} - \text{ت} = \text{ح}^2 - \text{ك}^2$$

$$\text{بالمقابلة} \quad \text{ك} = \text{ح}^2 - \text{ك}^2 + \text{ت}$$

$$\text{بالتجذير} \quad \sqrt{\text{ك}} = \sqrt{\text{ح}^2 - \text{ك}^2 + \text{ت}}$$

$$\text{مفروض} \quad \frac{\text{ت} + \text{ب}}{\text{ك} - \text{ت}} = \frac{1}{2} (\text{ك} + \text{ت})$$

$$\text{بالحبر حسباً مرة (١١٢)} \quad \text{ك} - \text{ت} = \frac{1}{2} (\text{ك} + \text{ت})$$

$$\text{بالترقية} \quad \text{ك} - \text{ت} = \frac{1}{4} (\text{ك} + \text{ت})^2$$

$$\text{بالمقابلة} \quad \text{ك} = \frac{1}{4} (\text{ك} + \text{ت})^2 + \text{ت}$$

$$\text{بالتجذير} \quad \sqrt{\text{ك}} = \sqrt{\frac{1}{4} (\text{ك} + \text{ت})^2 + \text{ت}}$$

مسائل مشورة

(١) سئل رجل عن عمره فقال اذا اضيف اليه عشر سنين وأُخذ الجذر

المالي للجنس وطُرح من هذا الجذر ٢ يبقى ٦ فكم كان عمره

بموجب شروط المسألة $٦ = ٢ - \sqrt{١٠ + ك}$

بالمقابلة $٨ = \sqrt{١٠ + ك}$

بالترقية $٦٤ = ١٠ + ك$

بالمقابلة أيضاً $٥٤ = ك$

والامتحان $٦ = ٢ - \sqrt{١٠ + ٥٤}$

(٢) أي عدد إذا اضيف اليه ٢٢٥٧٧ وأخذ جذر الختيع المائي وطُرح منه
١٦٢ يبقى ٢٢٧

بشروط المسألة $٢٢٧ = ١٦٢ - \sqrt{٢٢٥٧٧ + ك}$

بالمقابلة $٤٠٠ = \sqrt{٢٢٥٧٧ + ك}$

بالترقية $١٦٠٠٠٠ = ٢٢٥٧٧ + ك$

بالمقابلة $١٢٧٤٢٢ = ك$

الامتحان $٢٢٧ = ١٦٢ - \sqrt{٢٢٥٧٧ + ١٢٧٤٢٢}$

(٣) تاجر ربح من تجارته مبلغاً نسبته الى ٢٢٠ كسبة ٢٥٠٠ الى خمسة
اضاعاف المبلغ. فكم يكون ربحه

بشروط المسألة $ك : ٢٢٠ :: ٢٥٠٠ : ٥ ك$

بمحويل النسبة الى معادلة $٥ ك = ٨٠٠٠٠٠$

بالقسمة $ك = ١٦٠٠٠٠$ بالتجذير $ك = ٤٠٠$

تنبيه. عند تجذير ١٦٠٠٠٠ لا نعلم هل الجذر ايجائي ام سلبي ولكن حسب
شروط المسألة كان ربحاً فنجسبه ايجائياً. وقس على ذلك نظيره

(٤) سئل كم ميلاً الى المكان اللاني. فاجيب انه اذا طُرح ٩٦ من مربع
البعد يبقى ٤٨ فكم كانت المسافة

بالشروط $ك - ٩٦ = ٤٨$ $ك = ١٤٤$ $ك = ١٢$

(٥) اي عدد ينقسم ثلاثة امثال مربعه على ٤ ويطرح ١٢ من الخارج فيبقى

$$\text{بالشروط } \frac{2}{4} \text{ ك} - 12 = 180 = \text{ك} = 17$$

(٦) اي عددٍ يُطرح ربع مرتعوه من ٨ فيبقى ٤ الجواب ٤

(٧) اي عددين نسبة مجتمعها الى اكبرها كنسبة ١٠ الى ٧ واذا ضرب مجتمعها في اصغرها كان الحاصل ٢٧٠

نفرض مجتمعها = ١٠ فيكون الاكبر ٧ ك والا صغر ٣ ك والعددان ٢١ و ٩

(٨) اي عددين نسبة فضلتهما الى اكبرها كنسبة ٢ : ٩ وفضلة مربعيها ١٢٨ الجواب ١٨ و ١٤

(٩) اقسام ١٨ الى قسمين بحيث تكون نسبة مربع احدهما الى مربع الاخر

كنسبة ١٦ : ٢٥

ليكن ك الاكبر فيكون ١٨ - ك الاصغر وك : (١٨ - ك) :: ١٦ : ٢٥

وبالتحويل الى معادلة ١٦ ك = ٢٥ (١٨ - ك)

وبالتجدير ٤ ك = ٥ (١٨ - ك)

$$\text{ك} = 10$$

(١٠) اي عددٍ يُضرب نصفه في ثلثه فيكون الحاصل ٢٤ الجواب ١٢

(١١) اي عددٍ اذا اضيف اليه ٥ وطرح منه ٥ وضرب المجموع في الفضلة

يكون الحاصل ٩٦ الجواب ١١

(١٢) اقسام ١٤ الى قسمين بحيث تكون نسبة الخارج من قسمة اكبرها على

اصغرها الى الخارج من قسمة اصغرها على اكبرها كنسبة ١٦ : ٩

الجواب ٨ و ٦

(١٣) اي عددين نسبة احدهما الى الاخر كنسبة ٥ : ٤ ومجموع كليهما ١٠٢

افرض الاكبر ٥ ك والا صغر ٤ ك فيكون الجواب ١٥ و ١٢

(١٤) ثلاثة شركة قسموا ارباحهم فكان الخارج من قسمة حصة الاول على ٧

يمثل الخارج من قسمة حصة الثاني على ٣ والخارج من قسمة حصة الثاني على ١٧

يمثل الخارج من قسمة حصة الثالث على ٥ وان ضريت حصة الاول في حصة الثاني

وحصة الثاني في حصة الثالث وحصة الثالث في حصة الاول يكون مجموع الحواصل
 $\frac{2}{3} \times 2820$ فكم حصة كل واحد

لنفرض حصة الاول ك فلنا $7:2::ك: \frac{2}{3} =$ حصة الثاني

و $17:5::\frac{2}{3}:ك =$ الثالث

والاول في الثاني اي $ك = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

والثاني في الثالث اي $\frac{2}{3} \times \frac{10}{119} = \frac{20}{1323}$

والثالث في الاول اي $\frac{10}{119} \times ك = \frac{20}{1323}$

ثم بالتحويل الى مخرج مشترك والمجموع $\frac{20 \cdot 7}{1323} =$

فلنا $\frac{20 \cdot 7}{1323} = \frac{2}{3} \times 2820$ $ك = \frac{1}{79}$

فالاول $= \frac{1}{79}$ والثاني $= 24$ والثالث $= 10$

(١٥) بعض التجار اشتركوا في ارسال عامل الى مصر واعطاه كل واحد
 منهم من الدنانير عشرين امثال عدد الشركة. وكانت عمالة العامل في المائة من الدنانير
 ضعف عدد الشركة. فان ضرب $\frac{1}{100}$ من ربحه في $\frac{2}{9}$ امثال الحاصل عدد
 الشركة فكم كانت الشركة

ليكن عدد الشركة ك فيكون المال الذي بيد العامل $10 ك$ ورجح العامل على
 كل 100 دينار $= 2 ك$ وعلى $10 ك$ يكون ربحه $\frac{2}{9} ك$ ويكون $\frac{1}{100}$ من
 هذا الربح $\frac{2}{900} ك$ و $\frac{2}{900} ك = \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{2}{81} ك = \frac{2}{225} ك$

فلنا $\frac{2}{225} ك = 225 ك = ك$ $225 ك = ك$ $10 = ك$

(١٦) اي عدد اذا اضيف اليه 2 وطرح منه 10 يكون مربع المجموع مع

مضاعف مرتع النضلة ١٧٤٢٥

الجواب ٧٥

(١٧) اي عدد ين نسبة احدها الى الاخر كنسبة ٢ : ٥ ومجموع مربعيهما ١٦٦٦

الجواب ٢١ و ٢٥

(١٨) سافر زيد وعمرو كل واحد من بلع قاصدين ان يتلاقيا في مكان.

ولما التقيا كان زيد قد قطع من المسافة ١٨ ميلاً زيادة عن عمرو. وفي سيرهما كان

زيد قد قطع مسافة عمرو في $\frac{١٥}{٤}$ يوم. وكان عمرو قد قطع مسافة زيد في ٢٨

يوماً. فكم كان البعد بين البلدين

لنفرض ك = المسافة التي قطعها زيد

وك - ١٨ = اثني قطعها عمرو

فيكون $\frac{ك}{١٨} = \frac{ك - ١٨}{١٥ \frac{٤}{٤}}$ سفر زيد اليومي

$\frac{ك}{٢٨} =$ سفر عمرو اليومي

ولنا ك : ك - ١٨ :: $\frac{ك}{٢٨} : \frac{ك - ١٨}{١٥ \frac{٤}{٤}}$

ك = ٧٢ = مسافة زيد. والبعد = ١٢٦ ميلاً

(١٩) اي عدد ين نسبة احدها الى الاخر كنسبة ٨ : ٥ وحاصلها ٢٦٠

الجواب ٢٤ و ١٥

(٢٠) رجل اشترى ثوبين مجموعهما ٢١ ذراعاً. وكان ثمن الذراع من كل

واحد من الدراهم بقدر عدد اذرع. ونسبة ثمن الواحد الى ثمن الاخر :: ٤ : ١ فكم

ذراعاً كان كل ثوب.

(٢١) اي عدد ين نسبة احدها الى الاخر كنسبة ٢ : ٢ ونسبة فضلة قوتيهما

الجواب ٦ و ٤

الرابعتين الى مجتمع كعبيهما كنسبة ٢٦ : ٧

(٢٢) بعض السواح ترافقوا في السفر. ومع كل واحد منهم قدر ما مع الاخر

من الدراهم ولكل واحد من الخُدّام انفاق بقدر عدد السواح. والدراهم التي مع كل

واحد من السواح مضاعف عدد الخدام ومجموع الكل ٢٤٥٦ درهماً فكم كان عدد السواح
الجواب ١٢

(٢٢) طلب الملك من مقاطعه رجالاً للحرب فارسلت كل قرية انصاراً بعدد
قرى تلك المقاطعة اربع مرات. واذا لم يرضَ الملك بذلك ارسلت كل قرية ثلثة انصار
ايضاً فكانت نسبة العدد كله بعد هذه الزيادة الى عدد المرسلين اولاً كنسبة ١٦ : ١٢
فكم قرية في هذه المقاطعة
الجواب ١٢



الفصل الحادي عشر

في معادلات ممتزجة من الدرجة الثانية

١٢١ تنقسم المعادلات الى اقسام شتى باعتبار قوة الحرف الدال على
الكمية المجهولة

الاول معادلات من الدرجة الاولى وهي ما ليس فيها سوى القوة الاولى من
المجهولة. مثالها $x = t + b$ وتسمى ايضاً معادلات بسيطة وقد تقدم ذكرها
الثاني معادلات من الدرجة الثانية وهي ما كانت القوة العليا فيها من المجهولة
ملاً. ويقال لها ايضاً معادلات مربعة. فان لم يكن فيها غير القوة من المجهولة فهي
المحضة. وقد مضى ذكرها. مثالها $x^2 = t - r$ وان كان فيها القوة الثانية والاولى
من المجهولة فهي الممتزجة. مثالها $x^2 + b = k$

الثالث معادلات من الدرجة الثالثة وهي ما كانت فيها القوة العليا من المجهولة
كعباً. وهي ايضاً اما محضة مثل $x^3 = b - s$ واما ممتزجة مثل $x^3 + t = k$
 $b = k$ وح وفس على ذلك معادلات الدرجة الرابعة والخامسة وهلم جرا

١٢٢ قد راينا في ما تقدم ان المعادلة المربعة المحضة نحل بالتجزير جانبيها.
وهكذا ايضاً الممتزجة اذا كان الجانب الذي فيه المجهولة مربعاً تاماً. مثالها

$x^2 + t = k$ $x^2 + t = k$ $x^2 + t = k$ $x^2 + t = k$ $x^2 + t = k$
الاول مربع كمي ثنائي. وحسبنا تقدم (١٠٢) لنا بالتجزير $x^2 + t = k$
وبالمقابلة $x^2 + t = k$

١٢٢ مراراً كثيرة يحدث ان الجانب الذي فيه المجهولة لا يكون مربعاً تاماً مثل ك^٢ + ٢ ت ك = ب فلو عرفنا الجزء الناقص من الجانب الاول لكي يصير مربعاً تاماً واضفناه الى الجانبين لحصلنا المعادلة محضة بالتجذير كما تقدم (٧٨) فبما ان الجزء الثاني هو مضاعف حاصل الجزءين يكون ٢ ت ك في المعادلة المذكورة مضاعف حاصل جزئي الكمية التي نحن في طلبها وتكون الكمية ك + ت ومربعها ك^٢ + ٢ ت ك + ت^٢ اي الجزء الناقص هو مربع نصف مسمى القوة الدنيا من المجهول. ولنا من ذلك قاعدة لانعام تربيع معادلة مربعة متمتجة وهي ان يؤخذ مربع نصف مسمى القوة الدنيا من المجهول ويضاف الى جانبي المعادلة

فلو فرض ك^٢ + ٢ ف ك = د لكان لنا حسباً نقدم

$$ك^٢ + ٢ ف ك + ٢ ف^٢ = د + ٢ ف^٢$$

$$ك + ٢ ف = \sqrt{د + ٢ ف^٢}}$$

$$ك = \sqrt{د + ٢ ف^٢}} - ٢ ف$$

وهي عبارة عمومية لكل معادلة مربعة متمتجة. فلو فرض ك^٢ - ٦ ك = ٧ لقلنا حسب هذه العبارة ك^٢ - ٦ ك + ٩ = ٧ + ٩ ك^٢ - ٦ ك + ٩ = ١٦

تنبيه. لكل معادلة مربعة محضة كانت او متمتجة فيمتان لان الجذر الشفيعي ملتبس (١٠٢) وهذا الجذر هو نفس قيمة المجهول في كل معادلة مربعة محضة. مثاله ك^٢ = ٦٤ ك = ٨ $\sqrt{٦٤} = ٨$ ولكن في المتمتجة لا بد من اضافة شيء الى هذا الجذر او طرح شيء منه كما راينا. ونرى القيمتين نارة ايجائيتين ونارة احداها ايجائية والاخرى سلبية. مثال ذلك

$$ك + ٨ = ٢٠ \quad ك - ٤ = ٦ \quad ٢ = ١٠ - ٨ \quad ك - ٨ = ١٠ - ٢٠ = -١٠$$

$$١٥ - ك = ٤ + ١ = ٥ \quad ٢ = ١٥ - ٨ = ٧ \quad ٢٥ - ٤٠ = -١٥$$

وبالتعويض عنها بثلاثة ٢ - ٨ × ٢ = ٩ - ٢٤ = -١٥

١٢٤ قبل اتمام الترييع يجب مقابلة المعادلة حتى تكون المجهولات وحدها على جانب واحد والمعلومات على الجانب الاخر. ويجب ايضاً ازالة الكسور والقيمة على مسي القوة العليا للجهول. ولايضاح كل ذلك قد وضعنا هذه الامثلة

- (١) مفروض $ك + ٦ ت = ك = ب$
 باتمام الترييع $ك + ٦ ت + ك + ٩ ت = ٩ ت + ٦ ت + ب$
 بالتجذير $ك + ٢ ت = ٩ ت + ٦ ت + ب$
 وبالمقابلة $ك - ٢ ت = ٩ ت + ٦ ت + ب$
- (٢) مفروض $ك - ٨ ب = ك = ح$
 باتمام الترييع $ك - ٨ ب + ك + ١٦ ب = ١٦ ب + ح$
 بالتجذير $ك - ٤ ب = ١٦ ب + ح$
 بالمقابلة $ك = ٤ ب + ١٦ ب + ح$
- (٣) مفروض $ك + ت = ك = ب + ح$
 باتمام الترييع $ك + ت + ك = ٢ ك + ت = ٢ ب + ٢ ح + ت$
 بالتجذير $ك + ٢ ت = ٢ ب + ٢ ح + ت$
 وبالمقابلة $ك = ٢ ب + ٢ ح + ت$
- (٤) مفروض $ك - ك = ح - د$
 باتمام الترييع $ك - ك + ١ = ١ + ح - د$
 وبالتجذير والمقابلة $ك = ١ + ح - د$
- (٥) مفروض $ك + ٢ = ك = د + ٦$
 باتمام الترييع $ك + ٢ + ٩ = ٩ + د + ٦$
 وبالتجذير والمقابلة $ك = ٩ + د + ٦$
- (٦) مفروض $ك - ت = ك = ب - س د$

باتمام التربيع $ك - ت ب ك + \frac{ت ب}{٤} = \frac{ت ب}{٤} + ت$

ب - س د

بالتجذير والمقابلة $ك = \frac{ت ب}{٣} + \frac{ت ب}{٤} + ت ب - س د$

(٧) مفروض $ك = \frac{ت ب}{ب} + ح$

باتمام التربيع $ك + \frac{ت ب}{٤} = \frac{ت ب}{٤} + \frac{ت ب}{ب} + ح$

وبالتجذير والمقابلة $ك = \frac{ت ب}{٢} - \frac{ت ب}{٤} + ح$

(٨) مفروض $ك = \frac{ت ب}{ب} - ح$

باتمام التربيع $ك - \frac{ت ب}{ب} = \frac{ت ب}{٤} + ح$

وبالتجذير والمقابلة $ك = \frac{ت ب}{٢} + \frac{ت ب}{٤} + ح$

١٣٥ متى كانت القوة الدنيا في عقد من اجزاء المعادلة يجب جمعها الى جزء واحد قبل اتمام التربيع. وان كانت مضلعة يجب فكها الى اضلاعها لكي يُعرف مسأها

(١) مفروض $ك = ٢ + ك + ٢ + ك = د$

بالجمع $ك = ٦ + ك$

باتمام التربيع $ك + ٦ = ٦ + ك + د$

وبالتجذير والمقابلة $ك = ٢ - \sqrt{٦ + د}$

(٢) مفروض $ك = ت + ك + ب + ك = ح$

بالفك حسب (٢٨) $ك = (ت + ب) \times ك = ح$

باتمام التربيع $ك + (ت + ب) \times ك = \frac{ت + ب}{٢}$

$ح + \frac{ت + ب}{٢}$

بالتجذير $ك + \frac{ت + ب}{٢} = \sqrt{ح + \frac{ت + ب}{٢}}$

$$\text{وبالمقابلة ك} = \frac{ت + ب}{٢} - \sqrt{\frac{ت + ب}{٢} + ح} + ح$$

$$(٣) \text{ مفروض ك} + ت - ك = ب$$

$$\text{بالفك (٣٨) ك} + ت - ك = ب$$

$$\text{باتمام التربيع ك} + ت - ك = ب + ح$$

ب +

$$\text{بالتجذير والمقابلة ك} = \frac{ت + ب}{٢} - \sqrt{\frac{ت + ب}{٢} + ح}$$

١٣٦ ينبغي في بعض الاحيان ان تُعدَّ المعادلة لاتمام التربيع بالمجبر او المقابلة او القسمة او تبديل العلامات وما يشبه ذلك كما ترى في هذه الامثلة

$$(١) \text{ مفروض ت} + ٥ - ك = ٣ - ب = ٣ - ك$$

$$\text{بالمقابلة والجمع ك} + ٢ = ٣ - ب - ت$$

$$\text{باتمام التربيع ك} + ٢ = ١ + ٣ - ب - ت$$

$$\text{بالتجذير والمقابلة ك} = \frac{١ + ٣ - ب - ت}{٢}$$

$$(٢) \text{ مفروض } \frac{٢٦}{٣} = \frac{ك}{٣} - ٤$$

$$\text{بالمجبر والمقابلة والجمع ك} + (١٠) = ٥٦$$

$$\text{باتمام التربيع ك} + (١٠) = ٢٥ + ٨١$$

$$\text{بالتجذير والمقابلة ك} = \frac{٢٥ + ٨١}{٢} - ٥$$

$$(٣) \text{ مفروض ك} + ٢٤ - ت = ٦ - ح = ٥ - ك$$

$$\text{بالمقابلة والجمع ك} + ١٢ = ٦ - ح - ت$$

$$\text{بالقسمة على ٦ ك} + ٢ = ١ - ح - ت$$

$$\text{باتمام التربيع ك} + ٢ = ١ + ١ - ح - ت$$

$$\text{بالتجذير والمقابلة ك} = \frac{١ + ١ - ح - ت}{٢}$$

$$(٤) \text{ مفروض ح} + ٢ = ك - د = \frac{ب}{ت}$$

$$\text{بالمجبر والمقابلة ب} + ٢ = ك - د - ح$$

$$\text{بالقسمة على ب} \quad \frac{\text{ت د} - \text{ت ح}}{\text{ب}} = \frac{\text{ك}^2}{\text{ب}} + \text{ك}^1$$

$$\text{باتمام الترييع ك}^1 + \frac{\text{ك}^2}{\text{ب}} + \frac{\text{ت}^1}{\text{ب}} = \frac{\text{ت د} - \text{ت ح}}{\text{ب}} + \frac{\text{ت}^1}{\text{ب}}$$

$$\text{بالتجذير والمقابلة ك}^1 = \frac{\text{ت}^1}{\text{ب}} + \frac{\text{ت د} - \text{ت ح}}{\text{ب}} - \frac{\text{ت}^1}{\text{ب}}$$

$$(٥) \text{ مفروض ب ك}^1 + \text{د ك}^1 - \text{ك}^1 = \text{ب ح}$$

$$\text{بالقسمة على ب} \quad \text{د ك}^1 - \text{ك}^1 = \frac{\text{ب ح}}{\text{ب}} = \frac{\text{ك}^1}{\text{د} + \text{ب}} + \frac{\text{ك}^1}{\text{د} + \text{ب}}$$

$$\left(\frac{\text{ك}^1}{\text{د} + \text{ب}} + \frac{\text{ب ح}}{\text{د} + \text{ب}} \right)$$

$$(٦) \text{ مفروض ت ك}^1 + \text{ك}^1 = \text{ح} + \text{ك}^2 - \text{ك}^1$$

$$\text{بالمقابلة والجمع ت ك}^1 + \text{ك}^1 - \text{ك}^2 = \text{ح}$$

$$\text{بالقسمة على ت} \quad ١ + \text{ك}^1 = \frac{\text{ك}^2}{١ + \text{ت}} - \frac{\text{ح}}{١ + \text{ت}}$$

$$\text{ثم ك}^1 = \frac{١}{١ + \text{ت}} + \left(\frac{\text{ك}^2}{١ + \text{ت}} - \frac{\text{ح}}{١ + \text{ت}} \right)$$

١٢٧ لنفرض ت ك^١ + ب ك^١ = د فاذا ضرب الجانبان في ٤ ت واضيف

اليها ب^١ نصير المعادلة ٤ ت ك^١ + ٤ ت ب ك^١ + ب ك^١ = ٤ ت د + د ب^١ فنرى الجانب الاول قوة ثامة من ٢ ك + ب ولنا من ذلك قاعدة اخرى لاتمام الترييع وهي ان تضرب المعادلة في اربعة امثال مسمى قوة المجهول العليا وتضيف الى الجانبين مربع مسمى قوته الدنيا

تنبيه . هذه القاعدة اسهل من الاولى متى كان للمجهول مسميات لا يمكن ازالها

بالقسمة لانه لا يحدث منها كسر في اتمام الترييع كما نرى في هذه الامثلة

$$(١) \text{ مفروض ت ك}^1 + \text{د ك}^1 = \text{ح}$$

باتمام الترييع حسب القاعدة الثانية

$$٤ ت ك^1 + ٤ ت د ك^1 + د ك^1 = ٤ ت ح + د$$

$$\text{بالتجذير} \quad \sqrt{٤ ت ك^1 + ٤ ت د ك^1 + د ك^1} = \sqrt{٤ ت ح + د}$$

(٢) مفروض $ك - ك' = ١٢$ بتبديل العلامات $ك' - ك = ١٢$

$$ثم ك = ١٦٦ \pm ٢$$

١٢٨ يمكن ان يكون جزء من كمية ثنائية اصلية قوة مثل $ك' + ت$ ومربعا يكون $ك' + ٢ ت$ $ك' + ت$ فنرى دليل المجهول في الجزء الاول مضاعف دليله في الثاني. وان فقد الجزء الثالث يستعمل بانماز التربيع حسبا تقدم. ولنا من ذلك هذه القاعدة. وهي كل معادلة فيها قوتان من المجهول فقط دليل احدها مضاعف دليل الاخرى تحل كمعادلة مربعة ابي بانماز التربيع

(١) مفروض $ك - ك' = ب - ت$ بانماز التربيع $ك - ك' = \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} = ب - ت$

$$\text{بالتجذير والمقابلة } ك = \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} + ب - ت$$

$$\text{بالتجذير ايضا } ك = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} + ب - ت$$

(٢) مفروض $ك - ك' = ب - ت$

$$ك = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} + ب - ت$$

(٣) مفروض $ك + ك' = ح - ن$ بانماز التربيع $ك + ك' = ح - ن$

$$\text{بالتجذير والمقابلة } ك = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} + ح - ن$$

$$\text{بالترقية } ك = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} + ح - ن$$

(٤) مفروض $ك + ك' = ٨ ك' = ت + ب$ بانماز التربيع $ك + ك' = ٨ ك' = ت + ب$

$$\text{بالتجذير والمقابلة } ك = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} + ت + ب$$

$$\text{بالترقية } ك = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} + ت + ب$$

١٣٩ منى خرج للمجهول قيمة وهمية (١٠٢) لا يمكن ان توجد تلك القيمة
خفية. مثالة

ك^٢ - ٨ ك = ٢٠ - ك $\sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$ و $\sqrt{4} = 2$ كمية وهمية فلا توجد للجهول قيمة. ولا بد لكل معادلة مربعة ان تكون على احدى هذه الصور الثلاث

$$(1) \quad \sqrt[n]{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}} + \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \quad \text{ب} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

$$(2) \quad \sqrt[n]{\frac{1}{b} + \frac{1}{n}} = \frac{1}{b} \quad \text{ب} = \frac{1}{b} - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{bn}$$

(۲) $\sqrt[4]{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$

ففي الاولى والثانية لانكون القيمة وهية البتة. ونكون وهية في الثالثة متى كان
ب اكثر من $\frac{1}{4}$ ث' فالقيمة الوهية تدل على فساد مسئلة كما تقدم (١٠٢)

فلو قيل اقسام ٨ الى قسمين حاصلها ٢٠ لنيل $ك \times (٨ - ك) = ٢٠$ $ك = ٤ \pm \sqrt{٤ - ٢٠}$ وذلك مستحيل

١٤٠ المجهول في كل معادلة مربعة فيمتان حسبنا تقدم (١٢٣) وغالبًا نتعين التي يجب ان تؤخذ منها بشروط المسئلة . فلو قبل اقسام ٢٠ الى قسمين حاصلها يعدل ثمانية امثال فضلتهما ل قيل اصغرها = ك واكبرها = ٢٠ - ك وبشروط المسئلة ك \times (٢٠ - ك) = ٨ \times (٢٠ - ٢ ك)

$$٦,١٤٠ = ١٧ \pm ٢٢ = ك$$

ولكن لا يكون ٤٠ قسماً من ٢٠ فيكون القسم الاصغر ٦ والاكبر ٢٤

١٤١ لنا طريقةٌ أخرى لحلّ المعادلات المربعة المتترجة. وهي بالتعويض . فلنفرض $ك = ف ك + ق$ وفوق معروفان . فلنفرض $ك = ى + \frac{1}{4} ف$ ثم بالتعويض عن $ك$ بهذه القيمة نصير المعادلة

$$ق + ف + ی = ق + ف + ی$$

$$\text{ثم ی}^{\text{ر}} + \text{ف}^{\text{ا}} = \text{ف}^{\text{ا}} + \text{ق}^{\text{ر}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{f} + \frac{1}{q}} = \frac{1}{f} \quad \text{ی} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f} + \frac{1}{q}$$

وك $= \frac{1}{3}f + \frac{1}{2}\sqrt{f^2 + c}$ وهي عبارةٌ عمومية لكل معادلة مربعة
متزنة كما نرى في هذه الامثلة الآتية

مفروض ك' + ٦ = ك' ٩١ = ثم ك' = ٩١ - ٦ ك'
وهنا ف - ٦ = وق ٩١ = فلنا بموجب العبارة المذكورة - ٢ + ٩١ + ٩١
= - ٢ + ١٠ = - ١٢ أو ٧

فروض ك^٢ - ١٠٩ = ٢٢ - ك
ثم ك^٢ = - ك + ١٢٢ ف - = ١
ولنا - = $\frac{1}{\sqrt{122 + \frac{1}{4}}}$ - = $\frac{1}{\sqrt{122}} + \frac{1}{\sqrt{122}}$ = ١١ او ١٢

مفروض ك + ٢ = ١٨٠ ثم ك = ١٨٠ - ٢ = ١٧٨
 ف = ٢ - ١٧٨ = ١٨٠ - ٢ = ١٧٨
 او - ١٥

مفروض $ك^2 + ك = ٩٠$ ثم $ك^2 - ٩٠ = ٠$

$$ك = \frac{٩٠ + \sqrt{٩٠^2 - ٤ \times ١ \times ٠}}{٢ \times ١} = \frac{٩٠ + ٩٠}{٢} = ٩٠$$

$$ك = \frac{٩٠ - \sqrt{٩٠^2 - ٤ \times ١ \times ٠}}{٢ \times ١} = \frac{٩٠ - ٩٠}{٢} = ٠$$

٦ = $\frac{٢٧ + ٢}{٤} = \frac{٢٩}{٤}$ او $\frac{١}{٢}$

أمثلة

$$\text{ك} = \gamma - 1, \quad \text{ك} = \gamma - 1, \quad \text{ك} = \gamma - 1 \quad (1)$$

$$\frac{2}{4} - 12 = 4 \quad 46 = \frac{4 - 72}{4} - 4 \quad (2)$$

$$\frac{\gamma}{\xi} - \alpha \xi = \kappa \quad \kappa = \frac{\kappa - 12}{1 + \kappa} - \kappa \xi \quad (2)$$

$$1 - \xi = \kappa \quad \frac{7 - \kappa^2}{2} + \kappa^2 = \frac{2 - \kappa^2}{2 - \kappa} - \kappa \quad (4)$$

$$r \frac{1}{12} \alpha = k \quad r = \frac{9 - 100}{12k} - \frac{17}{k} \quad (5)$$

$$٦١ = ١٢ = ك \quad \frac{٢-ك}{٢} - ١٠ = ١ + \frac{٤-ك}{٤-ك} \quad (٦)$$

$$٢١ = ٢١ = ك \quad ١ - \frac{٧+ك}{٩} = \frac{ك-٧}{٢-ك} - \frac{٤+ك}{٢} \quad (٧)$$

$$٢٨ = ١ = ك \quad ٢-ك = \frac{١+٢ك}{٩+ك} - \frac{١٠-٢ك}{٦-ك} \quad (٨)$$

$$٢ = ك \quad ٢ = \frac{٢}{ك} + \frac{٦}{١+ك} \quad (٩)$$

$$١٠ = ك \quad ٩-ك = \frac{١-ك}{٦} - \frac{٢ك}{٢+ك} \quad (١٠)$$

$$\frac{٢}{٢-ك} + ١ = ك \quad \frac{٢}{٢} = \frac{٢}{ك} + \frac{ك}{٢} \quad (١١)$$

$$\frac{١}{٢} \left(\frac{٢}{٢} + \frac{٢}{٢} \right) + \frac{٢}{٢} = ك \quad ٢ = ٢ك + ٢ \quad (١٢)$$

$$\frac{١}{٢} = ك \quad \frac{١}{٢} = \frac{٢ك}{٢} - \frac{٢ك}{٢} \quad (١٣)$$

$$\frac{١}{٨} = ك \quad ٢ = ٢ك + ٢ك \quad (١٤)$$

$$٤٩ = ك \quad ٢٢ = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} \quad (١٥)$$

$$\frac{١}{٦} = ك \quad ٩٩ = ٩٦ + ٢ك - ٤ك \quad (١٦)$$

$$٦ = ك \quad ٢ = \frac{١}{٢}(ك+١٠) - \frac{١}{٢}(ك+١٠) \quad (١٧)$$

$$\frac{١}{٢} = ك \quad ٨ = ٢ك - ٢ك \quad (١٨)$$

$$\frac{١}{٩} = ك \quad \frac{١}{٩} = \frac{١}{٩} - \frac{١}{٩} \quad (١٩)$$

$$\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} = ك$$

$$\frac{٢-ك}{٢} + \frac{٢}{٢} = ك \quad ٢-ك = \frac{٢-ك}{٢} \quad (٢٠)$$

$$٤ = ك \quad \frac{٢-ك}{٢} = \frac{٢+ك}{٢} \quad (٢١)$$

$$(٢٢) \quad ٧٥٦ = ٥ك + ٦ك = ٢٤٢$$

$$(٢٣) \quad ٢١ = ٢ك + ١ك = ٤ك$$

$$(٢٤) \quad ٧٥ + ٥ك = ٢ك + ١ك = ٣ك$$

$$(٢٥) \quad ١٦ + ٧ك = ١٠ - ٤ك + ١٦ = ٩ك$$

$$(٢٦) \quad ٦ك = ٢ك + ٤ك$$

$$\text{بالقسمة على } ٦ك \quad ٦ = ٢ + ٤$$

$$(٢٧) \quad ٤ك - ٥ = ٢ك - ٧ = ٩ك + ٢٢ = ١٢ك$$

$$(٢٨) \quad ٢ك = ٦ك - ٢ = ٦ك + ٢ = ١١ك$$

$$(٢٩) \quad ٤٠ = ٢(٥ - ٢ك) = ١٠ - ٤ك$$

$$(٣٠) \quad ١٠ = ٦ك + ٢ = ٢ك + ٨$$

$$(٣١) \quad ٢ب - ٢ك = ٤ك - ٢ = ٨ب + ٢ك + ١٦ = ١٠ب$$

$$(٣٢) \quad ٤ك - ٢ب = ٤ك - ٢ = ٨ب + ٢ك + ١٦ = ١٠ب$$

$$(٣٣) \quad ٢ك = ٢ك + ٢ = ٨ب + ٢ك + ١٦ = ١٠ب$$

$$(٣٤) \quad ١٢ = ٤ك + ٨ = ٢ك + ١٠$$

$$(٣٥) \quad ٥١٢ = ٨ك - ٢ = ٢ك + ١٠$$

$$(٣٦) \quad ٩٩ = ٢ك - ٧ = ٢ك + ١٠$$

$$(٣٧) \quad ٠ = ٢١ + ٨ك + ٢ = ٢ك + ١٠$$

$$(٣٨) \quad ٠ = ٥٠ + ١٢ك - ٢ = ٢ك + ١٠$$

$$(٣٩) \quad ٧٠ = ١٦ك - ٢ = ٢ك + ١٠$$

$$(٤٠) \quad ٢ك + ١٥ = ٣ك \quad ٣ \pm ٦ - ١١١ = ٤ك$$

$$(٤١) \quad ٣ك - \frac{١}{٤}ك = ١٠ \quad ٦ = ٦ - ٦ = ٤ك$$

عمليات

(١) تاجرٌ عندُ ثوبان طولها ١١٠ اذرع وان طُرِحَ مربع اذرع اطولها من مقدار اذرع الاخر ٨٠ مرق يبقى ٤٠٠ فكم ذراعاً كل ثوبٍ

لنفرض ك اطولها و ١١٠ - ك الاخر

بشروط المسئلة $٤٠٠ = ٨٠ \times (١١٠ - ك) - ك^٢$

ك = ٦٠ اطولها ٥٠ = الاخر

(٢) سُئِلَ أَخَوَانِ كم عمر كل واحدٍ منكما. فقالا بمجموع عمرينا ٤٥ سنة

وحاصلها ٥٠٠ سنة. فكم عمر كلٍ منها
الجواب ٢٥ و ٢٠

(٣) اي عددٍ من فضلتها ٤ وحاصلها ١١٧

ك = احدها ك + ٤ = الاخر

ثم $(ك + ٤) \times ك = ١١٧$
الجواب ٩ و ١٣

(٤) تاجرٌ باع ثوباً كان قد اشتراه بثلاثين ديناراً ولو ضرب الثمن الذي به

باعه به في الربح الذي نتج له لكان الحاصل مكعب الربح. فكم كان الربح

لنفرض ك = الربح فيكون $٣٠ + ك$ ثمن المبيع

ثم بشروط المسئلة $ك^٢ = (٣٠ + ك) \times ك$
الجواب ٦ دنانير

(٥) ايُّ عددٍ من فضلتها ٢ وفضلة كعبيها ١١٧

ك = الاصغر ك + ٢ = الاكبر
الجواب ٢ و ٥

(٦) ما عددان فضلتها ١٢ ومجموع مربعيهما ١٤٢٤

الجواب ٢٠ و ٢٢

(٧) ما عددان فضلتها ٧ ونصف حاصلها مع ٢٠ يعدل مربع اصغرها

ك = الاصغر ك + ٧ = الاكبر

$$\text{ثم بالمسألة} \quad \text{ك} = \frac{(7 + \text{ك}) \times 7}{2} + 20 = \text{ك}$$

الجواب ١٢ و ١٩

(٨) رف طيور طار منه جذر مال نصفه ثم $\frac{1}{4}$ منه وبقي طيران فكم طائراً كان الرف

$$\text{لنفرض العدد ٢ ك} \quad \text{فلنا ك} + \frac{16 \text{ ك}}{4} + 2 = 2 \text{ ك}$$

الجواب ٧٢ طائراً

(٩) رجل اشترى قطيعاً من الغنم بثمن ٢٤٠٠ دينار. ولو زيد عدد الغنم ٨ لكان ثمن كل راس اقل مما كان في الحقيقة ١٠ دنانير. فكم راساً كان ذلك القطيع

الجواب ٤٠

(١٠) رجل اشترى مواشي بمبلغ ١١٤٠ ديناراً ومات منها ٨ روس ثم باع الباقي ورجع في كل راس ٨ دنانير ولم يخسر شيئاً. فكم راساً اشترى

الجواب ٢٨

(١١) زيد وعبيد سافرا معاً قاصدين مكاناً يبعد عنها ٢٠٠ ميل. وكان زيد يسبق عبيداً كل ساعة ميلاً فوصل قبله بعشر ساعات. فكم ميلاً مشي كل واحد منها في الساعة

زيد = ٦ اميال وعبيد = ٥ اميال

(١٢) اقسام ١٨ الى ضلعين حتى يكون مجموع كعبيها ٢٤٢

$$\text{ك} = \text{احدها} = \frac{18}{\text{ك}} = \text{الآخر}$$

$$\text{ك} = 6 \text{ اكبرها} = \frac{18}{6} = 3 = \text{اصغرها}$$

(١٣) ائى عددان فضلتهما ١٢٠ ونسبة اكبرها الى اصغرها :: الاصغر : ١٠

الجواب ٤٠ و ١٦

(١٤) ائى عددان مجتمعها ٦ ومجتمع كعبيها ٧٢

الجواب ٢ و ٦

(١٥) اقسام ٥٦ الى قسمين يكون حاصلها ٦٤٠

الجواب ٤٠ و ١٦

(١٦) رجل اشترى اثواباً ثمنها ٦٧٥ ديناراً. ثم باع كل ثوبٍ بثمانية واربعين ديناراً ورجح مبلغاً يماثل ثمن الثوب الاصلي. فكم ثوباً اشترى الجواب ١٥

(١٧) رجل اشترى فرساً بمبلغ من المال ثم باعه بمائة وتسعة عشر ديناراً ورجح في المائة ما يماثل الثمن الاصلي فكم كان ثمنه

ك = الثمن فيكون ك ايضاً الربح في المائة و $\frac{ك}{١٠٠}$ الربح كله

$$\text{فلنا } ك + \frac{ك}{١٠٠} = ١١٩ \quad ك = ٧٠$$

(١٨) رجل اشترى اثواباً بمبلغ ١٨٠ ديناراً. ولو زيد ثلثة اثوابٍ لانحط ثمن الثوب ثلثة دنانير. فكم ثوباً اشترى الجواب ١٢

(١٩) تاجران تشاركا وكان راس مالها ١٠٠ دينار. وبقيت حصة احدها في الشركة ثلثة اشهر وحصة الاخر شهرين. ثم انفصلت الشركة فحصل لكل واحدٍ منهما من راس المال والربح ٩٩ ديناراً. فكم وضع كل واحدٍ من راس المال في الاصل

لنفرض ك = حصة الاول و ١٠٠ - ك حصة الثاني. فيكون ربح الاول ٩٩ - ك لثلاثة اشهر وك - ١ = ربح الثاني لشهرين ولو بقي راس مالو ثلثة اشهر

لكان ربحه $\frac{٢ - ك}{٣}$ ولكن الربح هو ك راس المال. فلنا ك : ٩٩ - ك :: $\frac{٢ - ك}{٣}$: ١٠٠ - ك

$$ك = ٤٥ = \text{الاول} \quad ٥٥ = \text{الثاني}$$

(٢٠) نزلت امرأتان الى السوق ومع كل واحدةٍ منهما عدد من البيض خلاف ماع الاخرى ولكن الجميع ١٠٠ بيضة. فباعت كل واحدةٍ ماعها بثمن واحد. فقالت احداها للاخرى لو كان معي من البيض قدر ماعك لاذت ثمنه ١٥ غرشاً. وقالت الاخرى لو كان معي قدر ماعك لاذت ٦٤ غرش. فكم بيضة كان مع كل واحدةٍ منهما لنفرض ماع الاولى = ك وما مع الاخرى ١٠٠ - ك. وبما ان الاولى كانت

قد باعت ١٠٠ - ك بثمن ١٥ غرشاً لنا (١٠٠ - ك) : ١٥ :: ك : $\frac{١٥}{١٠٠ - ك}$

والثانية كانت باعت ك بثمن $\frac{٦٤}{٣}$ غرش لنا

$$ك: (١٠٠ - ك) :: \frac{٢٠}{٣} : \frac{٢٠٠ - ٢٠}{ك}$$

ثم ان كل واحدة احدث مبلغًا واحدًا فلنا

$$\frac{١٥ ك}{١٠٠ - ك} = \frac{٢٠٠ - ٢٠}{ك}$$

$$ك = ٤٠ = الاولى \quad ٦٠ = الثانية$$

(٢١) تاجران باعا اذرعًا من قاشٍ بمبلغ ٢٥ دينارًا وباع احدهما ٢ اذرع زيادة عن الاخر. فقال له صاحبه لو بعث ما بعته لآخذت ٢٤ دينارًا. فقال وانا لو بعث ما بعته لآخذت ١٢ ذينار. فكم ذراعًا باع كل واحدٍ منهما

ك = ما باعه الاول وك + ٢ = ما باعه الثاني. فيكون

$$\frac{٢٤ ك}{٣ + ك} \text{ ثمن ك اذرع و } \frac{٢٥ ك + ٧٥}{٢ ك} \text{ ثمن ك + ٢ اذرع فلنا}$$

$$٢٥ = \frac{٢٤ ك}{٣ + ك} + \frac{٧٥ + ك}{٢ ك}$$

$$ك = ١٠ \pm ٥ = ١٥ \text{ او } ٥ = الاولى$$

$$١٨ \text{ او } ٨ = الثاني$$

(٢٢) سافر زيد وعبيد قاصدين بلدًا تبعد عنهما ١٥٠ ميلًا وكان زيد يقطع من المسافة كل ساعة ٢ اميال زيادة عن عبيد فوصل قبل عبيد بثمان ساعات وعشرين دقيقة. فكم قطع كل واحدٍ منهما في الساعة

الجواب ٩ و ٦

(٢٣) اي عدد من فضلتها ٦ واذا اضيف ٤٧ الى مضاعف مربع الاصغر

يعدل المجتمع مربع الاكبر

(٢٤) زيد وعبيد تصدقا على الفقراء كل واحدٍ منهما بمبلغ ١٢٠٠ دينار

وكان الذين اعطاهم زيد يزيدون اربعين نفراً عن الذين اعطاهم عبيد غير ان صدقة عبيد لكل واحدٍ كانت تزيد ٥ دنانير عن صدقة زيد. فكم كان عدد الفقراء جميعاً.

$$زيد = ١٢٠ = عبيد = ٨٠$$

(٢٥) ما عددان مجتمعهما ١٠ ومجتمع مربعيهما ٥٨

الجواب ٧ و ٣

(٢٦) اشتري رجل في شراء بستان ثمة ١٧٥ ديناراً ثم خرج اثنان من الشركة فحق كل واحد من الآخرين ١٠ دنابر زيادة عما كان يلحقه لو بقي الاثنان معهم فكم كان عددهم أولاً
الجواب ٢

(٢٧) تاجر اشتري اذرعاً من القاش بستين ديناراً فأتخذ منها لنفسه ١٥ ذراعاً وباع الباقي باربعة وخمسين ديناراً فرج في كل ذراع $\frac{1}{10}$ دينار فكم ذراعاً اشتري وكم كان الثمن
الجواب ٧٥ ذراعاً و $\frac{1}{10}$ دينار ثمن الذراع

(٢٨) سافر زيد من بلد وعمره من اخرى قاصدين ان يلتقيا في مكان وكان بين البلدين ٢٤٧ ميلاً فكان زيد يقطع كل يوم ٩ اميال والابام التوب سافرا فيها قبل التقاها تريد ثلاثة ايام عن عدد الاميال التي كان يقطعها عمرو في اليوم فكم ميلاً سافرا
الجواب زيد = ١١٧ وعمره = ١٣٠

(٢٩) رجل اشتري ثوبين من الجوخ ثمن الذراع من الواحد يزيد ٤ دراهم عن ثمن الاخر وكان ثمن هذا الثوب جميعه ٢٦٠ درهماً وثن الاخر جميعه ٢٢٠ درهماً ولكنه اطول من الاول بذراعين فكم ذراعاً كان كل واحد منها وكم ثمن الذراع منه
الجواب الاول ١٨ ذراعاً وثن الذراع ٢٠ درهماً والاخر ٢٠ ذراعاً وثن الذراع ١٦ درهماً

(٣٠) رجل اشتري ٥٤ رطلاً من الخمر الاصفر وعة ارطال من الخمر الاسود وكان ثمن الرطل من الاول يعدل نصف ارطال الثاني وثن الرطل من الثاني اقل من ثمن الرطل من الاول اربعة دراهم ثم مزجها وباع الرطل من المزج بعشرة دراهم فخر ٥٧٦ درهماً فكم كان ثمن الرطل من الاصفر وكم عدد ارطال الاسود
الجواب الرطل من الاصفر = ١٨ درهماً والاسود ٢٦ رطلاً

(٣١) اي عدد اذا طرِح مربعه من ٤٠ واضيف الى جذر الباقي المال ١٠ وضرب المجمع في ٢ وانقسم المحاصل على العدد نفسه يخرج ٤
الجواب ٦

(٣٢) سئل رجل عن عمره فقال اذا اضيف جذره المال الى نصفه وطرح من المجمع ١٢ لا يبقى شيء فكم كان عمره
الجواب ١٦

(٣٣) رجل اشتري زقين من الخمر ثمنها ٥٨ غرشاً وفي الواحد منها ٥

رطل زيادة عن الآخر وثن الرطل اقل من $\frac{1}{4}$ عدة ارطال الاصفر بقرشين فك
رطلاً في كل زقي وكم ثن الرطل

الجواب الأكبر = ١٧ والاصغر = ١٢ وثن الرطل = ٢

(٢٤) رجل معه ٢٤ قطعة بعضها فضة وبعضها نحاس. وقيمة القطعة من

الفضة تساوي غروشاً عدد قطع النحاس وقيمة القطعة من النحاس تساوي عدد
قطع الفضة. وقيمة المجموع ٢١٦ غرشاً. فكم عدد القطع

الجواب الفضة = ٦ والنحاس = ١٨

(٢٥) رجل اشترى عدة من الغنم بثمانين ديناراً. ولو اخذ بهذا الثمن أكثر

بما اخذ باربعة روس لانهط ثمن الراس ديناراً واحداً. فكم رأساً اشترى

الجواب ١٦

!!

١٤٢ قد تسهل الاعمال الجبرية ولا سيما حل المعادلات بواسطة التعويض

عن عبارات طويلة بجوف واحد. وعند نهاية العمل ترجع العبارة الاصلية. فلو فرض

ك' - ٢ ت ك = $\frac{2}{4} + ٨٦٦ - ٦٤ + ح$ تضع ب عوض الجانب

الثاني فتصير ك' - ٢ ت ك = ب ثم ك = ت \pm $\frac{2}{4} + ب$ ثم بترجع

العبارة الاصلية تصير ك = ت \pm $\frac{2}{4} + ٨٦٦ - ٦٤ + ح$

ولو فرض ت ك - ٢ ك - د = ب ك - ك' - ك

فبالقابلة والفك تصير ك' + (ت - ب - ١) ك = د

بوضع ح عوض (ت - ب - ١) لنا ك' + ح = د

ثم ك = $\frac{2}{4} + \frac{2}{4} + د$

وبترجع العبارة الاصلية ك = $\frac{2}{4} + \frac{2}{4} + د + \frac{2}{4} + ٨٦٦ - ٦٤ + ح$



الفصل الثاني عشر

في المسائل المشتملة على مجهولين فاكثر

$$١٤٣ \text{ لنفرض ك} + \text{ى} = ١٤$$

$$\text{وايضاً ك} - \text{ى} = ٢$$

$$\text{بنقل الياء فيهما لنا ك} = ١٤ - \text{ى}$$

$$\text{وك} = ٢ + \text{ى} \quad \text{وحسب الاولية الحادية عشر ان الاشياء المساوية لشي}$$

واحد هي متساوية

$$\text{فاذا } ٢ + \text{ى} = ١٤ - \text{ى} \text{ وهي معادلة جديدة فيها مجهول واحد فقط}$$

وقد استخرجناها من معادلتين في كل واحدٍ منها مجهولان. ولنا من ذلك هذ

القاعدة لاجراج احد المجهولين واستخراج معادلة واحدة من اثنتين. وهي ان تستعلم قيم

اخذ المجهولين في المعادلتين وتبنى المعادلة الجديدة من هاتين القيمتين

(١) ما عدنان مجتمعهما ٢٤ والاكبر منها بقدر الاصغر ٥ مرات

$$\text{لنفرض ك} = \text{الأكبر} \quad \text{وى} = \text{الاصغر}$$

$$(١) \text{ بالشرط الاول} \quad \text{ك} + \text{ى} = ٢٤$$

$$(٢) \text{ بالشرط الثاني} \quad \text{ك} = ٥ \text{ى}$$

$$(٣) \text{ بمقابلة الياء في الاولى} \quad \text{ك} = ٢٤ - \text{ى}$$

$$(٤) \text{ بالمساواة بين (٢) و (٣)} \quad ٥ \text{ى} = ٢٤ - \text{ى}$$

$$(٥) \text{ بالمقابلة والقسمة} \quad \text{ى} = ٤$$

(٢) ما كيتان مجتمعهما يعدل ح وفضله مربعهما تعدل د

$$\text{لنفرض ك} = \text{أكبرها} \quad \text{وى} = \text{اصغرها}$$

$$(١) \text{ بالشرط الاول} \quad \text{ك} + \text{ى} = \text{ح}$$

$$(٢) \text{ بالثاني} \quad \text{ك} - \text{ى} = \text{د}$$

$$(٣) \text{ بمقابلة ياء في (٢)} \quad \text{ك} = \text{د} + \text{ى}$$

$$(٤) \text{ بالتجدير} \quad \sqrt{\text{د} + \text{ى}} = \text{ك}$$

$$(٥) \text{ بمقابلة ياء في (١)} \quad \text{ك} = \text{ح} - \text{ى}$$

$$(٦) \text{ بالمساواة بين (٤) و (٥) } \sqrt{د + ي} = ح - ي$$

$$(٧) \text{ ولنا } ي = \frac{د - ح}{ح}$$

$$(٢) \text{ مفروض } ت ك + ب ي = ح$$

$$\text{و } ك + ي = د$$

$$\text{مطلوب قيمة } ي = \frac{ح - ت}{ب - ت}$$

$$١٤٤ \text{ مفروض } ك = ح ي$$

$$\text{وايضاً } ت ك + ب ك = ي$$

ونرى هنا قيمة ك في الاولى هي ح ي ويمكننا اذ ذاك ان نعوض عن ك في الثانية بهذه القيمة فتصيرت ح ي + ب ح ي = ي وليس فيها سوى مجهول واحد. ولنا من ذلك هذه القاعدة الثانية لاجراج مجهول. وهي ان نستعلم قيمة احد المجهولين في احدي المعادلتين ونعوض عنه بها في الاخرى

(٤) سفينة جرت على اثر اخرى كانت قد سبقتها ٢٠ ميلاً. وكانت التابعة تجري ٨ اميال كلما جرت السابقة ٧ اميال. فكم ميلاً تجري الاولى قبل ان تترك الاخرى

لنفرض ما تجريه الاولى = ك وما تجريه الاخرى = ي فلنا

$$(١) \text{ بالشروط } ك = ي + ٢٠$$

$$(٢) \text{ بالشروط } ك : ي :: ٧ : ٨$$

$$(٣) \text{ ثم } ي = \frac{٧}{٨} ك$$

$$(٤) \text{ بالتعويض عن } ي \text{ في (١) } ك = \frac{٧}{٨} ك + ٢٠$$

$$(٥) \text{ ولنا من ذلك } ك = ١٦٠$$

(٥) سُئِلَ كم عمر زيد وعبيد. فقيل منذ سبع سنين كان عمر زيد ثلاثة امثال عمر عبيد. وبعد سبع سنين يكون عمر مضاعف عمر عبيد. فكم هو عمر عبيد

لنفرض ك = زيد ي = عبيد

$$\text{ثم } ك - ٧ = \text{زيد منذ سبع سنين}$$

$$ي - ٧ = \text{عيد منذ سبع سنين}$$

$$ك + ٧ = \text{زيد بعد سبع سنين}$$

$$ي + ٧ = \text{عيد بعد سبع سنين}$$

$$(١) \text{ بالشرط الاول } ك - ٧ = ٢ \times (ي - ٧) = ٢ - ي \quad ٢١ - ي$$

$$(٢) \text{ بالثاني } ك + ٧ = ٢ \times (ي + ٧) = ٢ + ي \quad ١٤ + ي$$

$$(٣) \text{ بمقابلة الاولى } ك = ٢ - ي \quad ١٤ - ي$$

$$(٤) \text{ بالتعويض عن ك في (٢) } ١٤ - ي + ٧ = ٢ + ي \quad ١٤ + ي$$

$$(٥) \text{ ولنا من ذلك } ي = ٢١ = \text{عمر عيد}$$

$$(٦) \text{ اي عدد ين نسبة اكبرها الى اصغرهما :: ٢ : ٢ ومجموعها يعدل}$$

$$\text{سدس حاصلها } ١٠ \text{ و } ١٥$$

$$١٤٥ \text{ مفروض } ك + ٢ = ي = ت$$

$$\text{وايضاً } ك - ٢ = ي = ب$$

$$\text{بجمع المعادلتين } ٢ ك = ت + ب$$

وليس فيها سوى مجهول واحد

$$\text{مفروض } ٢ ك + ي = ح$$

$$\text{وايضاً } ٢ ك + ي = د$$

$$\text{بالطرح } ك = ح - د$$

فقد اخرجت ي

$$\text{مفروض } ك - ٢ = ي = ت$$

$$\text{و } ك + ٤ = ي = ب$$

$$\text{بضرب الاولى في ٢ } ٢ ك - ٤ = ي = ت$$

$$\text{ثم يجمع الثانية والثالثة } ٢ ك = ب + ت$$

فلنا من ذلك قاعدة ثالثة لاجراء مجهول وهي ان تضرب احدى المعادلات

او تقسمها حتى يكون احد الاجزاء المشتملة على المجهول يعدل جزءاً من الاخرى

ثم نجمع المعادلتين او نطرح الواحدة من الاخرى حتى يَبْقَى جزء من الواحدة جزءاً

من الاخرى

(٧) عسكران مجتمع انفارها ٢١١١٠ ومضاعف اكبرها مع ثلاثة امثال
اصغرها يعدل ٥٢٢١٩ فكم عدد اكبرها

لنفرض ك = الاكبر وى = الاصغر

(١) بالشرط الاول $٢١١١٠ = ك + وى$

(٢) بالثاني $٥٢٢١٩ = ٢ك + ٣وى$

(٣) اضرب (١) في ٢ $٦٢٢٢٠ = ٢ك + ٢وى$

(٤) اطرح (٢) من (٣) $١١١١١ = ك$

(٨) مفروض $٢ك + وى = ١٦$ و $٢ك - وى = ٦$ مطلوب قيمة ك

(١) بالفرض الاول $١٦ = ٢ك + وى$

(٢) بالثاني $٦ = ٢ك - وى$

(٣) اضرب (١) في ٢ $٤٨ = ٢ك + ٢وى$

(٤) يجمع (٢) و (٣) $٥٤ = ٩ك$

$٦ = ك$

(٩) مفروض $ك + وى = ١٤$ و $ك - وى = ٢$ مطلوب قيمة وى

الجواب $وى = ٦$

(١٠) في عمود ذي قطعتين اذا اضيف $\frac{١}{٦}$ القطعة السفلى الى $\frac{١}{٦}$

القطعة العليا يكون المجموع ٢٨ واذا طُرِحَ ٦ امثال القطعة العليا من

٥ امثال القطعة السفلى يبقى ١٢ فما هو طول العمود

لنفرض ك = القطعة السفلى وى = العليا

(١) بالشرط الاول $٢٨ = \frac{١}{٦}ك + \frac{١}{٦}وى$

(٢) بالثاني $١٢ = وى - ٦ك$

(٣) بضرب (١) في ٦ $١٦٨ = ٢ك + وى$

(٤) بقسمة (٣) على $\frac{١}{٦}ك - وى = ٢$

$$(٥) \text{ بجمع (٣) و (٤) } ١٧٠ = ٢ك + ٦ = ١٧٠$$

$$(٦) \text{ بالجبر والجمع } ١٧٠ = ١٧ك$$

$$(٧) \text{ بالقسمة } ك = ٦٠ = \text{السفلى}$$

ثم بالتعويض عن ك في (٢)

$$١٢٠ = ١٦٨ = ٤٨ = ٤٨ = \text{العليا}$$

(١١) لنا ان نجد كسراً اذا اضيف واحد الى صورته يعدل الكسر

$\frac{1}{٣}$ وان اضيف واحد الى مخرجه يعدل الكسر $\frac{1}{٤}$

لنفرض ك = الصورة وى = المخرج

$$(١) \text{ بالشرط الاول } \frac{1}{٣} = \frac{١ + ك}{٤}$$

$$(٢) \text{ بالثاني } \frac{1}{٤} = \frac{ك}{١ + ٤}$$

$$ك = ٤ = \text{الصورة} \quad ١٥ = ١٥ = \text{المخرج}$$

(١٢) اى عددان نسبة فضلتهما الى مجموعهما :: ٢ : ٢ ونسبة مجموعهما الى

حاصلهما :: ٣ : ٥

(١٣) ما عددان حاصل مجتمعهما في فضلتهما يعدل ٥ وحاصل مجتمعهما

في فضلة مربعيهما يعدل ٦٥

لنفرض ك = الاكبر وى = الاصغر

$$(١) \text{ بالشرط الاول } (ك + ٥) \times (ك - ٥) = ٥$$

$$(٢) \text{ بالثاني } (ك + ٥) \times (ك - ٥) = ٦٥$$

$$(٣) \text{ بضرب الاولى } ك - ٥ = ٥$$

$$(٤) \text{ بقسمة (٢) على (٣) } ك + ٥ = ١٢$$

$$(٥) \text{ بجمع (٣) و (٤) } ٢ك = ١٨$$

$$(٦) ك = ٩ = ٩$$

(١٤) اى عددان فضلتهما ٨ وحاصلهما ٢٤٠

(١٥) ما عددان فضلتهما ١٢ ومجموع مربعهما ١٤٢٤

لنفرض أكبرها = ك واصغرهما = ي

(١) بالشرط الاول ك - ي = ١٢

(٢) بالثاني ك + ي = ١٤٢٤

(٣) بمقابلة ي في (١) ك = ي + ١٢

(٤) بتربيع الجانبين ك = ي + ١٢ ي + ١٤٤ + ي

(٥) بمقابلة ي في (٢) ك = ١٤٢٤ - ي

(٦) بالمساواة بين (٤) و (٥) ي + ١٢ ي + ١٤٤ = ١٤٢٤ - ي

$$ي = ٢٠ \quad ك = ٣٢$$

(١٦) انقسمت تركة بين عدة ورثة بحيث كان للاول ١٠٠ غرش وعشر

الباقى. وللثاني ٢٠٠ غرش وعشر الباقى. وللثالث ٣٠٠ غرش وعشر الباقى.

وللرابع ٤٠٠ غرش وعشر الباقى وهلم جرا. فوجد ان التركة قد انقسمت بينهم

بالسوية فكم كانوا وكل حصه كل واحد منهم

لنفرض التركة ي وكل حصه كل واحد فاذا يكون $\frac{ي}{١٠}$ عدة الورثة

$$ك = ١٠٠ + \frac{١٠٠ - ي}{١٠}$$

ويبقى ي - ك

$$ك = ٢٠٠ + \frac{٢٠٠ - ي - ك}{١٠}$$

ويبقى ي - ٢ ك

$$ك = ٣٠٠ + \frac{٣٠٠ - ي - ٢ ك}{١٠}$$

وهلم جرا وبطرح حصه الاول من حصه الثاني

$$لنا ١٠٠ - \frac{ك - ١٠٠}{١٠} = ٠ \text{ وهكذا ان طرح الثاني من الثالث}$$

والثالث من الرابع وهلم جرا

فلنأخذ هذه المعادلة $١٠٠ - \frac{ك}{١٠} = ١٠٠$

ك = ٩٠٠ حصة كل واحد ثم بالتعويض عن ك لنا $٩٠٠ = ١٠٠$

$$\frac{١٠٠ - ي}{١٠}$$

ي = ٨١٠٠ التركة $\frac{ي}{ك} = ٩ =$ عدد الورثة

(١٧) أي عدد من فضلتهما ١٥ ونصف حاصلها يعدل كعب أصغرها

الجواب ٣ و ١٨

(١٨) أي عدد من مجموعها ١٠٠ وحاصلها ٢٠٥٩

الجواب ٧١ و ٢٩

(١٩) اقسام ٢٦ الى ثلاثة اقسام بحيث يزيد كل قسم على ما قبله اربعة ويكون

الجواب ٨ و ١٢ و ١٦

مجموع مربعاتها ٤٦٤

(٢٠) قال حمار لبغل لو زيد على حملي رطل من حملك لكان وزنه مضاعف

وزن حملك. فقال البغل ولو زيد على حملي رطل من حملك لصار ثلاثة امثال حملك. فكم رطلا كانا حاملين

ك = البغل ي = الحمار

لو زيد على حل الحمار رطل من حل البغل لكان ي + ١ وبقي للبغل ك - ١

وكان حل الحمار مضاعف حل البغل أي ي + ١ = ٢ ك - ٢

وان زيد على حل البغل لنا ك + ١ = ٢ ي - ٢

$$ك = ٢ \frac{٢}{٥} \quad ي = ٢ \frac{١}{٥}$$

١٤٦ مفروض ك + ي + ل = ١٢

وايضاً ك + ٢ ي - ل = ١٠

وايضاً ك + ي - ل = ٤

لنا ان نجد قيمة ك وي ول

بالمقابلة لنا من الاولى ك = ١٢ - ي - ل

من الثانية ك $10 - 12 + 12 = 2$

من الثالثة ك $4 - 12 + 12 = 4$

بالمساواة بين الاولى والثانية وبين الثانية والثالثة لنا

$$12 - 12 + 12 = 12$$

$$\text{وايضاً } 10 - 12 + 12 = 12$$

بالمقابلة لنا من الاولى $2 - 12 = 12$

ومن الثانية $12 = 12$

بالمساواة بين هاتين $12 - 12 = 12$

فلنا من ذلك هذه القاعدة لحل مسئلة فيها ثلاثة مجهولات فاكتر

وهي ان تستخرج من المعادلات الثلاث معادلتين فيها مجهولان فقط . وتستخرج

من هاتين واحدة فيها مجهول واحد فقط

$$(1) \text{ مفروض } 12 = 12 + 12 = 12$$

$$\text{ايضاً } (2) \text{ ك } 12 + 12 = 12$$

$$\text{ايضاً } (3) \text{ ك } 12 = 12 + 12$$

المطلوب قيمة ك وى ول

$$(4) \text{ بطرح الثانية من الاولى } 12 = 12 + 12 = 12$$

$$(5) \text{ بطرح } (2) \text{ من } (1) \text{ ك } 12 = 12 + 12 = 12$$

$$(6) \text{ بطرح } (5) \text{ من } (4) \text{ ل } 12 = 12$$

ثم لكي نجد ك وى نعوض عن ل بقيمتها ونحول المعادلات كما تقدم

$$\text{فلنا في } (5) \text{ ك } 12 = 12 + 12 = 12$$

$$\text{وفي } (3) \text{ ك } 12 = 12 + 12 = 12$$

(22) لنا ان نجد قيمة ك وى ول من هذه المعادلات

$$(1) \text{ مفروض } 12 = 12 + 12 = 12$$

$$(2) \text{ ايضاً ك } 12 + 12 = 12$$

$$(3) \text{ ايضاً ك } 12 = 12 + 12$$

$$(4) \text{ اضرب الاولى في } 2 \text{ ك } 12 + 12 = 12$$

(٥) اطرح (٢) من (٤) $٢ ك + ١٦ = ١٦$

(٦) اطرح (٢) من (١) $٢ ك + ١٦ = ٦$

(٧) بالحجر $٢ ك + ١٦ = ٢٦$

(٨) اضرب (٥) في ٢ $٢ ك + ١٦ = ٤٨$

(٩) بطرح (٧) من (٨) $٢ ك = ١٢$ $٦ = ٦$

(١٠) بنحويل (٧) $٤ = ٤$

(١١) بنحويل (١) $٢ = ٢$

(٢٢) مفروض (١) $٢ ك + ١٦ = ١٦$

(٢) $٢ ك + ١٦ = ١٦$

(٣) $٢ ك + ١٦ = ١٦$

لنا ان نجد ك وى ول

الجواب $ك = \frac{٢ + ١٦ - ١٦}{٢} = ٢$ $٢ ك + ١٦ = ١٦$

$\frac{٢ + ١٦ - ١٦}{٢}$

(٢٤) زيد وعبيد ويكو نشاركوا في شراء فرس ثمنه مائة دينار. فلو أخذ ما مع زيد ونصف ما مع عبيد كان المجموع ثمن الفرس. او لو أخذ ما مع عبيد وثلاث ما مع بكر لكان المجموع ثمن الفرس. او لو أخذ ما مع بكر ورابع ما مع زيد لكان المجموع ثمن الفرس. فكم كان مع كل واحد منهم

لنفرض $ك = ٢$ $٢ ك + ١٦ = ١٦$

(١) بالشرط الاول $٢ ك + ١٦ = ١٠٠$

(٢) بالثاني $٢ ك + ١٦ = ١٠٠$

(٣) بالثالث $٢ ك + ١٦ = ١٠٠$

$ك = ٦٤$ $٢ ك + ١٦ = ١٤٤$

(٢٥) ثلاثة رجال اشتروا كراما بمائة دينار. فلو أخذ ما مع الاول ونصف ما مع الثاني كان المجموع ثمن الكرم. ولو أخذ ما مع الثاني وثلاث ما مع الثالث كان المجموع ثمن الكرم. ولو أخذ ما مع الثالث ورابع ما مع الاول كان المجموع ثمن الكرم.

فكم ديناراً مع كل واحداً منهم

الجواب الاول = ٦٤ الثاني = ٧٢ الثالث = ٨٤ ديناراً

(٢٦) ملك عنده ثلاث كتاب من العساكر احداها انراك والثانية عرب
والثالثة اعجام. فامر ان تهجم احدى الطوائف على قلعة ووعد ان يعطي الجميع ٩٠١
من الدنانير غير انه يعطي كل نفر من الطائفة الهاجمة ديناراً واحداً ويوزع ما بقي على
الطائفتين الاخرتين بالمساواة. فلو هجمت الانراك لاصاب كل نفر من الاخرين
نصف دينار. ولو هجمت العرب لاصاب كل نفر من الاخرين ثلث دينار. ولو هجمت
الاعجام لاصاب كل نفر من الاخرين ربع دينار. فكم نفراً كان في كل طائفة

لنفرض الانراك = ك والعرب = ي والاعجام = ل

ولنفرض ك + ي + ل = س اي مجموع الثلاثة. فان هجمت الانراك فلنا البقية
= س - ك وللانراك دينار واحد لكل نفر. وللبقية نصف دينار لكل نفراي ك +
 $\frac{1}{3}س - \frac{1}{3}ك = ٩٠١$ وان هجمت العرب فلنا ي + $\frac{1}{3}س - \frac{1}{3}ي = ٩٠١$
= $\frac{1}{3}س - \frac{1}{3}ك = ٩٠١$ وان هجمت الاعجام فلنا ل + $\frac{1}{4}س - \frac{1}{4}ل = ٩٠١$
ك = ٢٦٥ ي = ٥٨٢ ل = ٦٨٩

(٢٧) زيد وعمرو وبكر سافروا الى جهات مختلفة. وكان مجموع اسفارهم ٦٢
ميلاً. وكان سفر زيد اربعة امثال سفر بكر مع مضاعف سفر عمرو. و ١٧ مثل سفر
بكر تعدل مضاعف سفر زيد مع ثلاثة امثال سفر عمرو. فكم ميلاً سافر كل واحد منهم

زيد = ٤٦ عمرو = ٩ بكر = ٧

(٢٨) لئان نجد قيمة ك وي ول من هذه المعادلات

$$\frac{1}{3}ك + \frac{1}{3}ي + \frac{1}{4}ل = ٦٢$$

$$\frac{1}{3}ك + \frac{1}{4}ي + \frac{1}{5}ل = ٤٧$$

$$\frac{1}{4}ك + \frac{1}{5}ي + \frac{1}{6}ل = ٢٨$$

الجواب ك = ٢٤ ي = ٦٠ ل = ١٢٠

(٢٩) مفروض كى = ٦٠٠ كل = ٢٠٠

لى = ٢٠٠ مطلوب قيمة ك و ل وى

ك = ٢٠ لى = ٢٠ ل = ١٠

١٤٧ على هذه الكيفية نحل اربع معادلات فاكثر. ابي نستخرج من الاربع ثلاثاً ومن الثلاث اثنتين وهلم جراً

(٣٠) لئان نجد قيمة ك و ل و ن من هذه المعادلات

اربع معادلات { (١) مفروض $\frac{1}{3} ك + ل + \frac{1}{3} ن = ٨$
(٢) مفروض $ك + ل + ن = ٩$
(٣) مفروض $ك + ل + ن = ١٢$
(٤) مفروض $ك + ل + ن = ١٠$

ثلاث معادلات { (٥) بجبر الاولى $١٦ = ك + ل + ن$
(٦) بطرح (٢) من (٣) $٢ = ن - ل$
(٧) بطرح (٤) من (٣) $٢ = ن - ل$

معادلتان { (٨) بجمع (٥) و (٦) $١٩ = ك + ل$
(٩) بطرح (٧) من (٦) $١ = ل - ك$

الكميات المطلوبة { (١٠) بجمع (٨) و (٩) $٥ = ل$ $٢٠ = ك$
(١١) بمقابلة (٨) $٤ = ل - ١٩ = ك$
(١٢) بمقابلة (٣) $٢ = ل - ك - ١٢ = ن$
(١٣) بمقابلة (٢) $٢ = ك - ٩ = ن$

مطلوب ك و ل و ن { (٣١) مفروض $ك = ٥٠ + ن$
 $ك + ل = ١٢٠$ لى
 $ك + ل = ١٢٠$ لى
 $ك + ل = ١٩٥$ ل ن

ن = ١٠٠ ك = ١٥٠ لى = ٩٠ ل = ١٠٥

(٢٢) مطلوب عدد ذورقين احدهما في منزلة الآحاد والاخر في منزلة العشرات .
الذي في منزلة العشرات يعدل ثلثة امثال الاخر . واذا طُرِح ١٢ من العدد نفسه
يعدل الباقي منه مربع الرقم الذي في منزلة العشرات

لنفرض ك = الذي في منزلة العشرات وى = الذي في منزلة الاحاد . فوقع
ك في منزلة العشرات يزيد عشره امثال ما كان لو وقع في منزلة الاحاد . فلنا اذا
١٠ + ك = العدد

وبشروط المسئلة ك = ٣ ى

وايضاً ١٠ ك + ى = ١٢ = ك

ك = ٩٣

(٢٣) مطلوب ثلثة اعداد يكون الاول مع نصف الاخرين ٢٤ والثاني مع
ثلث الاخرين ٢٤ والثالث مع ربع الاخرين ٢٤ الجواب ١٠ و ٢٢ و ٢٦

(٢٤) مطلوب عدد ذورقين مجتمعهما ١٥ واذا اضيف ٢١ الى حاصلهما تنقلب
رتبة الرقين اي ان الذي كان في منزلة الاحاد يصير في منزلة العشرات وبالعكس
الجواب ٧٨

(٢٥) اي عدد ذورقين اذا انقسم على حاصل رقيه يخرج اثنان . واذا اضيف
٢٧ الى العدد نفسه تنقلب رتبة رقيه الجواب ٢٦

(٢٦) ما عددان اذا طُرِح الاصغر من ثلثة امثال الاكبر يبقى ٢٥ واذا انقسم
اربعة امثال الاكبر على ثلثة امثال الاصغر مع واحد يكون الخارج نفس العدد
الاصغر الجواب ١٢ و ٤

(٢٧) اي كسر اذا اضيف ٢ الى صورته تكون قيمته $\frac{1}{3}$ واذا طُرِح
واحد من مخرجه تكون قيمته $\frac{1}{6}$ الجواب $\frac{4}{31}$

(٢٨) رجل لهُ فرسان وسرّج قيمه ١٠ دنانير . فاذا وُضع السرج على الفرس
الاول تكون قيمته مضاعف قيمة الفرس الثاني . واذا وُضع على الثاني تكون قيمته اقل
من قيمة الاول بثلثة عشر ديناراً . فكم قيمة الفرسين الجواب ٥٦ و ٢٢ ديناراً

(٣٩) اقسام ٩٠ الى اربعة اقسام بحيث اذا اضيف الى الاول ٢ وطُرح من الثاني ٢ وضُرب الثالث في ٢ وانقسم الرابع على ٢ تكون الاقسام كلها متساوية

لنفرض ثلاثة اقسام ك وى ول فيكون الرابع ٩٠ - ك - ى - ل

$$\text{فلنا } ك + ٢ = ٢ - ى$$

$$\text{و } ك + ٢ = ٢ - ى$$

$$\text{وال } ٢ = \frac{٩٠ - ك - ى - ل}{٢}$$

الجواب ١٨ و ٢٢ و ١٠ و ٤٠

(٤٠) ما ثلاثة اعداد يكون الاول منها مع نصف مجموع الثاني والثالث ١٢٠

والثاني مع ١/٢ فضل الثالث والاوّل ٧٠ ونصف مجموع الثلاثة ٩٥

(٤١) ما عدد ان النسبة بين فضلتهما ومجموعهما وحاصلهما كالنسبة بين

الجواب ١٠ و ٣٠ و ٥

(٤٢) رجلٌ باع ٢٠ رطلاً من الخمر الاسود و ٣٠ رطلاً من الاصفر وكان

ثمن الجميع ١٢٠ غرشاً. ثم باع ٢٠ رطلاً من الاسود و ٢٥ رطلاً من الاصفر بالسعر

الاول وبلغ ثمن الجميع في المرة الثانية ١٤٠ غرشاً. فكم كان ثمن الرطل من كل صنف

الجواب الاسود = ٢ غروش والاصفر = غرشين

(٤٣) رجلٌ مزج خمرًا بماء ولو زاد من كل صنف ٦ ارطال لكان في المزج

٧ ارطال من الخمر لكل ٦ ارطال من الماء. ولو نقص من كل صنف ٦ ارطال

لكان في المزج ٦ ارطال خمر لكل ٥ ارطال ماء. فكم رطلاً مزج من كل صنف

الجواب الخمر = ٧٨ والماء ٦٦ رطلاً

(٤٤) اي كسر اذا تضاعفت صورته واضيف ٧ الى مخرجه تكون قيمته ٢

واذا تضاعف المخرج واضيف ٢ الى صورته تكون قيمته ٥

الجواب ٥

(٤٥) رجلٌ اشترى من التفاح والليمون بثلاثين غرشاً. وكان كل اربعة

تفاحات بغرش وكل خمس ليمونات بغرش ايضاً. ثم باع نصف التفاح و ١/٣ الليمون

بسعر ما اشترى فبلغ الثمن ١٢ غرشاً فكم اشترى من كل صنف

الجواب التفاح = ٧٢ والليمون = ٦٠

١٤٨ متى وجدك^رى^ر او كى^ر في كل جزء من المعادلتين تكونان على
احدى هاتين الهيئتين ث^رك^ر + ب^رك^رى^ر + س^رى^ر = ^د
ث^رك^ر + ب^رك^رى^ر + س^رى^ر = ^د

ولحلها افرض ك = ف^رى اذا ك^ر = ف^رى^ر

وبالتعويض عن ك^ر وك^ر في المعادلتين لنا

$$\frac{\text{ث ف^رى^ر + ب ف^رى^ر + س^رى^ر = د ثم^رى^ر}}{\text{ث ف^رى^ر + ب ف^رى^ر + س^رى^ر = د}} = \frac{\text{ث ف^رى^ر + ب ف^رى^ر + س^رى^ر}}{\text{ث ف^رى^ر + ب ف^رى^ر + س^رى^ر}}$$

$$\frac{\text{ث ف^رى^ر + ب ف^رى^ر + س^رى^ر = د ثم^رى^ر}}{\text{ث ف^رى^ر + ب ف^رى^ر + س^رى^ر = د}} = \frac{\text{ث ف^رى^ر + ب ف^رى^ر + س^رى^ر}}{\text{ث ف^رى^ر + ب ف^رى^ر + س^رى^ر}}$$

وبالمساواة بين هاتين لنا

$$\frac{\text{ث ف^رى^ر + ب ف^رى^ر + س^رى^ر = د}}{\text{ث ف^رى^ر + ب ف^رى^ر + س^رى^ر = د}} = \frac{\text{ث ف^رى^ر + ب ف^رى^ر + س^رى^ر = د}}{\text{ث ف^رى^ر + ب ف^رى^ر + س^رى^ر = د}}$$

(ث^رد - ث^رد) ف^ر + (ب^رد - ب^رد) ف^ر = س^رد - س^رد وهي معادلة

مربعة تحل باتمام التريع كما تقدم

$$(١) \text{ مفروض } ٢ ك^ر + ٢ ك^رى^ر + ٢٠ = ٢٠$$

$$٥ ك^ر + ٤١ = ٤١$$

افرض ك = ف^رى ثم بالتعويض لنا

$$\frac{٢٠}{١ + ٢ + ٢} = \text{ى^ر}$$

$$\frac{٤١}{٤ + ٢} = \text{ى^ر}$$

$$\frac{٤١}{٤ + ٢} = \frac{٢٠}{١ + ٢ + ٢}$$

$$\frac{١}{٣} \text{ او } \frac{١٢}{٣} = ١٢ - ف = ١٢$$

ثم بالتعويض عن ف لنا

$$\frac{٢٦٩}{٤١} = \frac{٤١}{٤ + \frac{١}{٣}} = \frac{٤١}{٤ + \frac{١}{٣}} = \text{ى^ر}$$

$$\frac{١}{٣} = ٢ = ك = ف = ٢ \times \frac{١}{٣} = ١$$

(٢) ما عددان اذا ضرب مجتمعهما في اكبرها يصل ٧٧ واذا ضربت فضلتهما في اصغرهما يحصل ١٢

لنفرض ك = اكبرها وى = اصغرهما

فلنا ك + ك' = ٧٧

و كى - ك' = ١٢

لنفرض ك = ف ى فلنا ف' ى' + ف ى = ٧٧ ى' = ف' + ف

وايضاً ف ى - ى' = ١٢ ى' = ى - ف

بالمساواة $\frac{٧٧}{١٢} = \frac{٢٢}{١٢} = \frac{١١}{٦}$ ف = $\frac{١١}{٦}$ او $\frac{٧}{٤}$

ى = ٤ ك = ٧

(٣) اى عددين فضلة مربعيهما ٥٦ ومجتمع مربع اصغرهما مع $\frac{١}{٣}$ حاصلها ٤٠
الجواب ٩ و٥

(٤) اى عددين ثلاثة امثال مربع اكبرها مع مضاعف مربع اصغرهما = ١١٠
ونصف حاصلها مع مربع الاصغر = ٤
الجواب ٦ و٤

١٤٩ متى ترقى الجهولان الى قوة واحدة لا تنحل المعادلة حسبما تقدم بل نستعمل طريقة اخرى نوضحها هنا وعليها نحل كل مسألة واقعة تحت هذه الفضية . وهي مفروض مجتمع عددين ومجتمع القوة التونية منها لنا ان نجد العددين على شرط ان لا يتجاوز القوة التاسعة

مفروض كمتان اكبرها ك واصغرهما ى

مفروض ايضا ك + ى = ٢ س ك - ى = ٢ ل

ثم بالجمع ك = س + ل وبالطرح ى = س - ل

ثم لنفرض ك' + ى' = ت ك' + ى' = ب

ك' + ى' = ر ك' + ى' = د وهلم جراً فنجد قيمة ك وى في اجزاء من المعلومات
ت ب ر د س على هذا الاسلوب

$$(١) \text{ ك} = (\text{س} + \text{ل}) = \text{س}^٢ + \text{س} \text{ ل} + \text{ل}^٢$$

$$\text{ى} = (\text{س} - \text{ل}) = \text{س}^٢ - \text{س} \text{ ل} + \text{ل}^٢$$

$$\text{بالجمع ك} + \text{ى} = \text{أى ت} = \text{س}^٢ + \text{س} \text{ ل} \quad \text{ل} = \frac{\text{ت} - \text{س}^٢}{\text{س}}$$

$$\text{ل} = \sqrt{\frac{\text{ت} - \text{س}^٢}{\text{س}}} \quad \text{فلنا إذا قيمة ك وى اى ك} = \text{س} + \sqrt{\frac{\text{ت} - \text{س}^٢}{\text{س}}}$$

$$\text{ى} = \text{س} - \sqrt{\frac{\text{ت} - \text{س}^٢}{\text{س}}}$$

$$(٢) \text{ ك} = (\text{س} + \text{ل}) = \text{س}^٢ + \text{س} \text{ ل} + \text{ل}^٢ + \text{ل}^٢$$

$$\text{ى} = (\text{س} - \text{ل}) = \text{س}^٢ - \text{س} \text{ ل} + \text{ل}^٢ + \text{ل}^٢ - \text{ل}^٢$$

$$\text{ك} + \text{ى} = \text{أى ب} = \text{س}^٢ + \text{س} \text{ ل} + \text{ل}^٢ + \text{ل}^٢$$

$$\text{ل} = \frac{\text{ب} - \text{س}^٢}{\text{س} + \text{ل}} \quad \text{ل} = \sqrt{\frac{\text{ب} - \text{س}^٢}{\text{س} + \text{ل}}}$$

فلنا قيمة ك وى بالتعويض اى

$$\text{ك} = \text{س} + \sqrt{\frac{\text{ب} - \text{س}^٢}{\text{س} + \text{ل}}} \quad \text{ى} = \text{س} - \sqrt{\frac{\text{ب} - \text{س}^٢}{\text{س} + \text{ل}}}$$

$$(٣) \text{ ك} = (\text{س} + \text{ل}) = \text{س}^٤ + \text{س}^٣ \text{ ل} + \text{س}^٢ \text{ ل}^٢ + \text{س} \text{ ل}^٣ + \text{ل}^٤$$

$$\text{ى} = (\text{س} - \text{ل}) = \text{س}^٤ - \text{س}^٣ \text{ ل} + \text{س}^٢ \text{ ل}^٢ - \text{س} \text{ ل}^٣ + \text{ل}^٤$$

$$\text{ك} + \text{ى} = \text{أى ر} = \text{س}^٤ + \text{س}^٣ \text{ ل} + \text{س}^٢ \text{ ل}^٢ + \text{س} \text{ ل}^٣ + \text{ل}^٤ \quad \text{وهي معادلة مربعة}$$

يُستعلم منها قيمة ل كما تقدم ثم يُعوّض بها عن ك وى

$$(٤) \text{ ك} = (\text{س} + \text{ل}) = \text{س}^٥ + \text{س}^٤ \text{ ل} + \text{س}^٣ \text{ ل}^٢ + \text{س}^٢ \text{ ل}^٣ + \text{س} \text{ ل}^٤ + \text{ل}^٥$$

$$\text{ل}^٥ + \text{س} \text{ ل}^٤ + \text{س}^٢ \text{ ل}^٣ + \text{س}^٣ \text{ ل}^٢ + \text{س}^٤ \text{ ل} + \text{س}^٥$$

$$\text{ى} = (\text{س} - \text{ل}) = \text{س}^٥ - \text{س}^٤ \text{ ل} + \text{س}^٣ \text{ ل}^٢ - \text{س}^٢ \text{ ل}^٣ + \text{س} \text{ ل}^٤ - \text{ل}^٥$$

$$\text{س}^٥ - \text{س}^٤ \text{ ل} + \text{س}^٣ \text{ ل}^٢ - \text{س}^٢ \text{ ل}^٣ + \text{س} \text{ ل}^٤ - \text{ل}^٥ \quad \text{وهي}$$

معادلة مربعة تُستعلم منها قيمة ل ثم قيمة ك وى كما تقدم

$$١٥٠ \quad \text{مفروض ك} + \text{ى} = \text{س}^٢ \text{ وك} - \text{ى} = \text{ل}^٢$$

$$\text{ثم لنفرض } \frac{ك}{ي} + \frac{ي}{ك} = ت \quad \frac{ك}{ي} + \frac{ي}{ك} = ب$$

$$\frac{ك}{ي} + \frac{ي}{ك} = ر \quad \frac{ك}{ي} + \frac{ي}{ك} = د$$

ثم بواسطة المعادلات المتقدمة (١٤٩) نجد قيمة ك وي في اجزاء من المعلومات
س ت ب ر د

$$(١) \quad \frac{ك}{ي} + \frac{ي}{ك} = ت = ك + ي = ت ك ي \times (س + ل) \times (س - ل) = ت (س - ل) \times (س - ل)$$

$$\text{وحسب (١٤٩) (١) لنا } ك + ي = س^٢ + ل^٢$$

$$\text{فاذا } ت س - ت ل = س^٢ + ل^٢$$

$$\frac{ل (ت - س)}{ت + س} = ل \quad \frac{س (ت - س)}{ت + س} = ل$$

$$\frac{ل (ت - س)}{ت + س} + س = ك$$

$$\frac{ل (ت - س)}{ت + س} - س = ي$$

$$(٢) \quad \frac{ك}{ي} + \frac{ي}{ك} = ب = ك + ي = ب ك ي \times (س - ل) \times (س - ل)$$

$$\text{حسب (١٤٩) (٢) لنا } ك + ي = س^٢ + ل^٢ \quad س ل + س ل = س^٢ + ل^٢$$

$$\frac{ل (ب - س)}{ب + س} = ل \quad \frac{س (ب - س)}{ب + س} = ل$$

$$\frac{ل (ب - س)}{ب + س} - س = ي \quad \frac{س (ب - س)}{ب + س} + س = ك$$

$$(٣) \quad \frac{ك}{ي} + \frac{ي}{ك} = ر = ك + ي = ر ك ي \times (س - ل) \times (س - ل)$$

$$\text{ثم حسب (١٤٩) (٣) لنا}$$

$$ك + ي = ٢س + ١٢س + ٢ل \quad \text{إذا}$$

وهي معادلة مربعة

$$r(s-l) = 2s^2 + 12sl + 2l^2$$

ستعلم منها قيمة ل وكذلك قيمة ك وى حسبما تقدم

$$\text{د} = \frac{\text{ي}}{\text{ا}} + \frac{\text{ك}}{\text{ي}} \quad (\text{ع}) \quad \text{د} = \text{ك} + \text{ي} = \text{د ك ي} = \text{د (س - ل)} \quad (\text{ز})$$

وحسب (١٤٩) (٤) لنا ك° + ي° = ٢س° + ٢٠س° ل + ١٠س° ل
 إذا ٢س° + ٢٠س° ل + ١٠س° ل = د° (س° - ل°) وهي معادلة مربعة
 نستعلم منها قيمة ل كما تقدم

۱۵۱ مفروض ك + ی = س ك ی = ف

فنجذ قيمة اية قوة فُرِضَتْ من كوى في اجزاء من المعلومتين سوف هكذا

(۱) $\text{ك} + \text{ك} + \text{ك} = \text{س}$

ك' + 'ی = س' - 'ك' ی = س' - 'ف

$$(2) \quad (ك' + ي') (ك + س) = (س' - ف') \times س$$

$$\begin{aligned} & \text{ك}^1 + \text{ي}^1 + \text{ك}^2 = (\text{ك} + \text{ي}) = \text{س}^2 - \text{ف}^2 \text{ ف} \text{ س} \quad \text{اي}^1 \text{ك}^1 + \text{ي}^1 + \\ & \text{ف} \text{ س} = \text{س}^2 - \text{ف}^2 \text{ ف} \text{ س} \end{aligned}$$

$$(۳) \quad (ك^۲ + ی^۲)(ك + ی) = (م^۲ - ۳ف س) (س)$$

$$ك^2 + ي^2 = (ك^2 + ي^2)س^2 = س^2 - ف^2$$

$$\text{ای ك}^{\text{ع}} + \text{ی}^{\text{ع}} + \text{ف} (\text{س}^{\text{ر}} - \text{ف}^{\text{ر}}) = \text{س}^{\text{ع}} - \text{ف}^{\text{ع}} \text{س}^{\text{ر}}$$

$$\text{ای ك}^{\text{ع}} + \text{ی}^{\text{ع}} = \text{س}^{\text{ع}} - \text{ف س}^{\text{ع}} + \text{آ ف}^{\text{ع}}$$

$$(4) \quad (ك^2 + ی^2)(س^2 - ۴فس + ۴ف^2) = (ك + ی)(ك - ی)(س - ۲ف)(س + ۲ف)$$

$$ای ک + ی + ° = ک ی (ک + ی) = س - ۴ ف س + ۲ ف س$$

$$\text{ای ک}^{\circ} + \text{ی}^{\circ} + \text{ف} (\text{س}^{\circ} - \text{ف}^{\circ} \text{س}) = \text{س}^{\circ} - \text{ف}^{\circ} \text{س}^{\circ} + \text{ف}^{\circ} \text{س}$$

$$ك^{\circ} + ي^{\circ} = س^{\circ} - \textcircled{ف} س^{\circ} + \textcircled{ف} س^{\circ}$$

ومطلقاً ك + ي = س - ن ف س⁻ + ن^{+/-} = ف س⁻ (ن-)⁺ ف س⁻ إلى آخره.

مثال (١) ما عددان مجموعهما ٦ ومجموع قوتيهما الخماسين ١٠٥٦

انظر (١٤٩) (٤)

$$س = ٢ = د = ١٠٥٦ \text{ فلنا لكي نجد قيمة ل}$$

$$٢س + ٢٠س + ٢ل + ١٠س + ٢ل = د = ١٠٥٦$$

$$١٠٥٦ = ٢ل + ٢٠ل + ٤٨٦$$

$$١٨ + ٢ل = ١٩ \quad ل = ١$$

$$ك = س + ل = ٢ + ١ = ٣ \quad ٤ = ١ + ٢ = س = ٣ - ١ = ٢$$

(٢) ما عددان مجموعهما ١٨ ومربع الاكبر على الاصغر مع مربع الاصغر

على الاكبر = ٢٧

$$\text{انظر (١٥٠) (٢) } س = ٩ \quad ب = ٢٧$$

$$ل = \frac{(ب - س)س}{ب + س} = \frac{(٢٧ - ٩)٩}{٢٧ + ٩} = \frac{٨١ \times ٩}{٣٦} = ٢$$

$$ك = س + ل = ٩ + ٢ = ١٢ \quad ١٢ = ٢ + ٩ = س = ١٢ - ٢ = ١٠$$

(٣) عددان مجموعهما ٥ وحاصلها ٦ فما هو مجموع قوتيهما الرابعتين

انظر (١٥١) (٣)

$$ك + ٤ = س = ٤ - ٢ = ٢ \quad ٢ + ٢ = ٤ \quad ٢ + ٢ = ٤ \quad ٢ + ٢ = ٤$$

١٥٢ متى كانت المعادلات الناتجة من مسألة أكثر من عدد المجهولات

المتضمنة فيها تكون بعضها اما متناقضة واما فضولاً. فمثال المتناقضة ٢ ك = ٦٠

٢ ك = ٢٠ لان بالاولى ك = ٢٠ وبالثانية ك = ٤٠ ولو غيرنا الثانية حتى

تصير ١ ك = ١٠ لكانت فضولاً لان قيمة ك تُستعمل بدونها. وان كان عدد المعادلات

اقل من عدد المجهولات في المسألة تكون المسألة سيالة اي اجوبتها كثيرة. وسياتي

الكلام على بعض انواع هذه المسائل في محله

١٥٣ في حل المسائل المتضمنة عدة مجاهيل. للتعلم باب واسع لاستعمال فطنته

في اختراع طرق لتسهيل العمل. وهذه الطرق لا تنحصر في قواعد معلومة

$$\text{فلو فُرض (١) } م + ك + ي = ١٢$$

$$(٢) م + ك + ل = ١٧$$

$$(٣) م + ي + ل = ١٨$$

$$(٤) ك + ي + ل = ٢١$$

فلنفرض مجنec المجاهيل اي ك + ي + م + ل = س

ثم في الاولى نجد الجميع الال اي س - ل = ١٢

في الثانية نجد الجميع الا ي اي س - ي = ١٧

في الثالثة الجميع الا ك اي س - ك = ١٨

في الرابعة الجميع الام اي س - م = ٢١

بالجميع ٤ س - ل - ي - ك - م = ٦٩

اي ٤ س - (ل + ي + ك + م) = ٦٩

اي ٤ س - س = ٦٩ ٢ س = ٦٩ س = ٢٢

ثم بالتعويض ٢٢ - ل = ١٢ ل = ١٠

٢٢ - ي = ١٧ ي = ٦

٢٢ - ك = ١٨ ك = ٥

٢٢ - م = ٢١ م = ٢

١٥٤ في ما تقدم استخدمنا المعادلات لحل مسائل عملية. وهي تُستعمل ايضاً

في برهان النظريات كما نرى هنا

نظرية اولى. اربعة امثال حاصل كيتين يعدل مربع مجنecها الا مربع فضلها

لنفرض اكبرها = ك اصغرها = ي

مجنecها = س فضلها = د

(١) بالشروط ك + ي = س (٢) ك - ي = د

(٣) بالجميع ٢ ك = س + د

(٤) بالطرح ٢ ي = س - د

(٥) بضرب (٣) في (٤) ٤ ك ي = س - د

نظرية ثانية . مجتمع مربعي كيتين يعدل مربع فضلتهما مع مضاعف حاصلها

لنفرض ك = الأكبر ى = الأصغر

د = فضلتهما ف = حاصلها

(١) بالشروط ك - ى = د (٢) ك ى = ف

(٣) بتربيع الاولى ك^٢ - ٢ ك ى + ى^٢ = د^٢

(٤) بضرب الثانية في ٢ ٢ ك ى = ٢ ف

(٥) بجمع هاتين ك + ى = د^٢ + ٢ ف

نظرية ثالثة . نصف فضلة كيتين مع نصف مجتمعهما يعدل اكبرها . ونصفا

مجتمعهما الا نصف فضلتهما يعدل اصغرهما

لنفرض (١) ك + ى = س (٢) ك - ى = د

(٣) بالقسمة على ٢ $\frac{1}{2} ك + \frac{1}{2} ى = \frac{1}{2} س$

(٤) ايضاً $\frac{1}{2} ك - \frac{1}{2} ى = \frac{1}{2} د$

(٥) بجمع هاتين ك = $\frac{1}{2} س + \frac{1}{2} د$

(٦) بطرحها ى = $\frac{1}{2} س - \frac{1}{2} د$

وقس على ذلك نظائره



الفصل الثالث عشر

في التناسب والنسبة

١٥٥ التناسب هو التفاوت بين كيتين باعتماد المقدار . ولا يقع الا بين

الكميات المتشابهة اي بين عدد و عدد او بين خط و خط او بين حجم و حجم او بين سطح و سطح وهم جراً لانه لا يمكن مناسبة خطوط على ارباط ولا سطوح على اقسام الوقت . واذا اعتبرت زيادة كمية على اخرى فهو التناسب الحسابي واذا اعتبرت

رار وجود احدها في الاخرى فهو التناسب الهندسي

١٥٦ التناسب الحسابي حسبما تقدم هو الفضلة بين كميتين او عدة كميات .
الكميات نفسها هي اجزاء التناسب . فالتناسب الحسابي بين ٥ و ٢ هو ٢ و يُدَلّ عليه
وضع علامة الطرح بين الكميتين هكذا ٥ - ٢ او بوضع نقطتين هكذا ٥ .. ٢ فان
سُرِبت اجزاء تناسب حسابي في كمية او انقسمت عليها بضرب التناسب او ينقسم على
لك الكمية مثالة لو فرض ت - ب = ر

بضرب الجانبيين في ح لنا ح ت - ح ب = ح ح ر

وبالقسمة على ح $\frac{ت}{ح} = \frac{ب}{ح} = \frac{ر}{ح}$

اذا اضيفت اجزاء تناسب الى اجزاء تناسب اخر كل جزء الى نظيره او طُرِحَتْ
اجزاء الواحد من اجزاء الاخر يعدل تناسب المجموع او الفضلة مجتمع التناسيبين او

فضلتهما . مثالة ليكن ت - ب { تناسيبين ثم
د - ح

(ت + د) - (ب + ح) = (ت - ب) + (د - ح) لان كل واحد من
الجانبيين = ت + د - ب - ح وكذلك (ت - د) - (ب - ح) =
(ت - ب) - (د - ح) لان كل واحد من الجانبيين = ت - د - ب + ح

التناسب الحسابي بين ١١ و ٤ = ٧

التناسب الحسابي بين ٥ و ٢ = ٣

وتناسب المجموع ١٦ و ٦ = ١٠ = مجموع التناسيبين

وتناسب الفضلة ٦ و ٢ = ٤ = فضلة التناسيبين

١٥٧ التناسب الهندسي هو المدلول عليه بالخارج من قسمة كمية على اخرى .

فالتناسب الهندسي بين ٨ و ٤ هو $\frac{٨}{٤} = ٢$ وبين ت و ب هو $\frac{ت}{ب}$ وبين د +
ح و ب + س هو $\frac{د + ح}{ب + س}$ ويُدَلّ عليه ايضاً بنقطتين بين الكميتين . مثالة ت :

ب و ١٢ : ٤ ويقال للكميتين معاً زوج وتسمى الاولى سابقاً والثانية تالياً

١٥٨ في كل تناسبٍ ثلاثة اقسام وهي السابق والتالي والتناسب الواقع بينهما.
وان فرض اثنان منها يُستعمل منها الثالث هكذا

لفرض السابق = ت والتالي = س والتناسب = ر ثم حسب الحد
المذكور آنفاً $ر = \frac{ت}{س}$ اي التناسب يعدل الخارج من قسمة السابق على التالي
بالمجهر $ت = س ر$ اي السابق يعدل حاصل التالي في التناسب. وبالقسمة على
 $ر = س = \frac{ت}{ر}$ اي التالي يعدل الخارج من قسمة السابق على التناسب

فرع أول في زوجين ان كان السابقان متساويين والتاليان متساويين ايضاً
يكون التناسبان متساويين (اقليدس ك ٥ ق ٧)

فرع ثانٍ في زوجين ان كان التناسبان متساويين والسابقان متساويين
يكون التاليان متساويين. وان كان التناسبان متساويين والتاليان متساويين
يكون السابقان متساويين (اقليدس ك ٥ ق ٩)

١٥٩ اذا تساوى السابق والتالي يكون التناسب واحداً ويقال له تناسب
المساواة. مثلاً $٢ \times ٦ : ١٨$ واذا كان السابق اكبر من التالي يكون التناسب
اكثر من واحد. مثلاً $١٨ : ٦ = ٣$ ويسمى تناسباً اعظم. واذا كان السابق اصغر
من التالي يكون التناسب اقل من واحد. مثلاً $٢ : ٦ = \frac{١}{٣}$ ويسمى تناسباً اصغر.
اما التناسب بالقلب او التناسب المكفوء فهو تناسب مكفوء كيتين. فالتناسب

بالقلب بين ٦ و ٢ هو $\frac{١}{٣} : \frac{١}{٦}$ اي $\frac{١}{٣} \div \frac{١}{٦}$ والتناسب المستقيم بين ت وب
هو $\frac{ت}{ب}$ وبالقلب هو $\frac{ب}{ت}$ اي $\frac{١}{ب} \div \frac{١}{ت} = \frac{١}{ب} \times \frac{ت}{١} = \frac{ت}{ب}$ اي الخارج
من قسمة التالي على السابق. فيُدل على التناسب المكفوء اما بقلب الكسر الدال على
المستقيم واما بقلب رتبة السابق والتالي. فتناسب ت : ب بالقلب هو ب : ت

١٦٠ التناسب المركب هو التناسب بين حواصل اجزأ تناسيين فاكثر اذا
ضرب كل جزء من الواحد في نظيره من الاخر. مثلاً

تناسب $٢ = ٢ : ٦$ وتناسب $٢ = ٤ : ١٢$ والمركب منها هو $٦ = ١٢ : ٧٢$

وهكذا المركب من ت : ب وس : د وح : ي هوت س ح : ب د ي =

ت س ح
ب د ي

فرع كل تناسب مركب يعدل حاصل التناسبات البسيطة التي تركب منها.

ثالثه تناسب ت : ب = $\frac{ت}{ب}$ وس : د = $\frac{س}{د}$ وح : ي = $\frac{ح}{ي}$ والمركب هوتس ح : ب د ي = $\frac{ت س ح}{ب د ي}$ = حاصل الكسور الدالة على التناسبات البسيطة

١٦١ في عدة تناسبات اذا كان تالي الاول سابق الثاني وتالي الثاني سابق

لثالث وهلم جرا يكون تناسب السابق الاول الى التالي الاخير مماثلاً للتناسب
لمركب من التناسبات كلها. مثالة

ت : ب : ب : س : د : د : ج

فالمركب من هذه التناسبات هو $\frac{ت س د}{ب س د ح}$ وهو يعدل $\frac{ت}{ح}$ ا ب

تناسب السابق الاول الى التالي الاخير

١٦٢ التناسب المركب من مربع اجزاء تناسب بسيط يسمى تناسباً مالياً.

نلو قرض ت : ب لكان تناسبها المالي ت : ب' والكعبي هو المركب من تكرار

لثلاثة تناسبات بسيطة اي ت : ب' وتناسب الجزر المالى هو ت : ب' والجزر

الكعبي ت : ب' فالتناسب البسيط بين ٦ و ٢ هو ٢ اي ٦ : ٢ = ٢

ومضاعفه $٦ = ٢ : ١٢$ وثلاثة امثاله $٩ = ٢ : ١٨$ والمالي $٩ = ٢ : ٦$ والكعبي $٢٧ = ٢ : ٦$

١٦٣ قد راينا ان التناسب يدل عليه بكسر. وراينا في فصل الكسور ان

فرعٌ اذا بقي التالي على حالته فكما زاد السابق زاد التناسب وبالقلب
(افليدس ك ٥ ق ٨ وق ١٠)

مثالہ ۱۲ = ۲ : ۶ و ۱۲ = ۴ : ۳ $\frac{ت}{ب} = ت : ب$ و $\frac{ث}{ن ب} = ث : ن ب$

فرع اذا بقي السابق على حاله فكما زاد التالي صغر التناسب وبالعكس
(افليدس ك ٥ ق ٨ وق ١٠)

ثم انه قد اتضح ما تقدم ان ضرب سابق زوج هو كقسمة التالي، وقسمة السابق
كضرب التالي، مثالة

$٨ : ٤ = ٢$ بضرب السابق في اثنين $١٦ : ٤ = ٤$

بقسمة التالي على اثنين $8 : 2 = 4$

فرع اذا انفك سابق او تال الى ضلعين فاكثر يمكن نقل ضلع فاكثر من
احدهما الى الاخر بدون تغيير التناسب. مثاله

$$\frac{م}{س} = ب \div \frac{م}{ی} = ب : \frac{م}{ی} \quad ۲ = \frac{۹}{۶} : ۶ \quad ۲ = ۹ : ۶ \times ۲$$

$$م : ب =$$

وان ضرب السابق والثاني كلاهما في كمية واحدة او انقسما عليهما فلا يتغير
الناسب (افلديس ك ٥ ق ١٥) مثاله

$2 = 4 : 8$ بالضرب في 2 $2 = 8 : 16$

وبالقسمة على ٢ $٢ = ٢:٤$ $ت:ب = ٢$ $م:مب = ٢$ $٢ = ٢:٤$

فرع التناسب بين كسرين لهما مخرج مشترك هو مثل الذي بين صورتيهما.

فتناسب $\frac{ت}{ن} : \frac{ب}{ن}$ هو $ت : ب$

فرع ثانٍ التناسب بين كسرين لهما صورة مشتركة هو مثل التناسب بالقلب

بين مخرجيهما. مثاله $\frac{ت}{م} : \frac{ن}{م}$ هو $\frac{ا}{ن} : \frac{ا}{م}$ اي $ن : م$

فاذا لكي نجد التناسب بين كسرين في صحيح نضربهما في المخرجين.

مثاله $\frac{ت}{د} : \frac{ب}{د}$ فبالضرب في $د$ لنا $\frac{ت}{ب} : \frac{د}{د}$ اي $ت : د$ ب $س$

١٦٥ اذا تركب تناسب اعظم (١٥٩) مع تناسب اخر بزيده. مثاله

لنفرض التناسب الاعظم $ا + ن : ا$

وتناسباً اخر $ت : ب$

فالركب منها $ت + ن : ن$ ب وهو اعظم من $ت : ب$

ثم اذا تركب تناسب اصغر مع تناسب اخر ينقصه

لنفرض التناسب الاصغر $ا - ن : ا$

وتناسباً اخر $ت : ب$

بالتركيب $ت - ن : ن$ ب

وهو اصغر من $ت : ب$

١٦٦ اذا اضيف الى جزوي زوج او طرح منهما كيتان تناسبهما مثل تناسب

الزوج المذكور يكون بين المجموعين او الباقيين نفس ذلك التناسب (اقليدس ك ٥

ق ٥ و ٦)

مفروض تناسب $ت : ب$ مثل $س : د$ ثم $ت + س : ب + د = ت : ب$

او $س : د$

(١) لان بالمفروض $\frac{ت}{ب} = \frac{س}{د}$

(٢) بالجبر $ت + د = ب + س$

(٣) اضيف س د الى الجانين ت د + س د = ب س + س د

(٤) بالقسمة على د $\frac{ب س + س د}{د} = ت + س$

(٥) بالقسمة على ب + د $\frac{ت}{ب} = \frac{س}{د} = \frac{ت + س}{ب + د}$

وكذلك $\frac{ت}{ب} = \frac{س}{د} = \frac{ت - س}{ب - د}$

(١) لان بالمفروض $\frac{س}{د} = \frac{ت}{ب}$

(٢) وبالجبر ت د = ب س

(٣) بطرح س د من الجانين ت د - س د = ب س - س د

(٤) بالقسمة على د $\frac{ب س - س د}{د} = ت - س$

(٥) بالقسمة على ب - د $\frac{ت}{ب} = \frac{س}{د} = \frac{ت - س}{ب - د}$

مفروض $٢ = ٥ : ١٥$

وايضاً $٢ = ٢ : ٩$

بجمع اجزاء الزوجين $٢ = ٢ + ٥ : ٩ + ١٥$

بالطرح $٢ = ٢ - ٥ : ٩ - ١٥$

وهكذا مهما تعددت الأزواج . مثلاً

$٢ = ٦ : ١٢$

$٢ = ٥ : ١٠$

$٢ = ٤ : ٨$

$٢ = ٣ : ٦$

بالجمع $٢ = (٢ + ٤ + ٥ + ٦) : (٦ + ٨ + ١٠ + ١٢)$ (اقليدس

ك ٥ ق ١٢)

١٦٧ تناسب اعظم بصغر باضافة كمية واحدة الى جزئيه . مثاله اذا فرض

ت + ب : ت اي $\frac{ت + ب}{ت}$ واذا اضيف ك الى الجزئين فلنا $\frac{ت + ب + ك}{ت + ك}$

ثم بالتحويل الى مخرج مشترك يصير الاول $\frac{ت^٢ + ت + ب + ت + ك}{ت (ت + ك)}$ والثاني $\frac{ت^٢ + ت + ب + ت + ك}{ت (ت + ك)}$ فالصورة الثانية اقل من الاولى ومن ثم صغر التناسب

تناسب اصغر يزداد باضافة كمية واحدة الى جزئيه

مفروض ت - ب : ت اي $\frac{ت - ب}{ت}$ ثم باضافة ك الى الجزئين لنا ت - ب + ك : ت + ك اي $\frac{ت - ب + ك}{ت + ك}$ وبالتحويل الى مخرج مشترك يصير الاول $\frac{ت - ت + ب + ت + ك}{ت (ت + ك)}$ والثاني $\frac{ت - ت + ب + ت + ك}{ت (ت + ك)}$ والصورة الثانية اكبر من الاولى فيكون التناسب قد زاد. واذا طرح كمية واحدة من الجزئين يكون الفعل عكس ما ذكر

امثلة

- (١) اي تناسبي اكبر ١١ : ٩ ام ٤٤ : ٣٥
- (٢) اي تناسبي اكبر ٢ : ٦ ت ام ٢ : ٧ ت
- (٣) سابق زوج ٦٥ والتناسب ١٢ فاهو التالي
- (٤) اذا كان التالي ٧ والتناسب ١٨ فاهو السابق
- (٥) ماهو التناسب المركب من ٢ : ٧ و ٥ : ١

٢ - ٢

- (٦) ماهو التناسب المركب من ك + ١ : ب وك - ١ : ت + ب وت + ب : ح
- (٧) اذا تركب ٥ ك + ٧ : ٢ ك - ٢ مع ك + ٢ : ٢ ك + ٢ فهل يحدث تناسب اعظم او اصغر
- (٨) اي تناسبي من الانواع الثلاثة (١٥٩) يحدث من تركيب ك + ١ : ت
- وك - ١ : ب وب : $\frac{ك - ١}{ت}$ الجواب تناسب المساواة

(٩) ما هو التناسب المركب من ٥ : ٧ و ٩ : ٤ المائي و ٣ : ٢ الكعبي

الجواب ١٤ : ١٥

(١٠) ما هو التناسب المركب من ٧ : ٢ و ٣ : ٤ الكعبي و ٩ : ٤ المجذري

الجواب ك : ٢ : ٤

المالي

(١١) ما هو التناسب المركب من ت - ك - ت : ك : ت و ت + ك : ب : وب :

الجواب (ت + ك) : ت : ت

ت - ك

(١٢) ايجي تناسب اكبر ت + ٢ : ٢ : ت + ٤ امر ت + ٤ : ٢ : ١

الجواب ت + ٤ : ٢ : ١

٥ +

نبذة

في النسبة

١٦٧ النسبة هي المساواة بين تناسبين فاكثر. وهي اما حسائية واما هندسية.

فالحسائية هي مساواة تناسبات حسائية كما في ٦ ٤ ١٠ ٨ واهندسية هي

مساواة تناسبات هندسية كما في ٦ ٢ ١٢ ٤ فينبغي ان يميز بين التناسب

والنسبة ولو استعمل اللفظان مترادفين في بعض الاحيان. والفرق بينهما واضح اذ

يقال في تناسب ما انه اكبر من اخر. مثاله ١٢ : ٢ اكبر من ٦ : ٢ ولا يقال ذلك

في النسبة لانها مساواة تناسبات والمساواة تستلزم عدم التفاوت. وفي كل نسبه زوجان.

ويقال للسوابق الاجزاء المتشابهة وكذلك للتوالي. ويقال للسوابق والتوالي من

كل زوج الاجزاء المتناسبة ولا خلاف في رتبة زوجي نسبه لانه ان كان ت : ب ::

س : د تكون س : د :: ت : ب من حيث مساواة النسبتين. واذا اريد الدلالة على

نسبه بين ثلاث كميات فلا بد من تكرار الوسطى. فيدل على النسبة بين ٨ و ٤ و ٢

هكذا ٨ : ٤ :: ٤ : ٢

ويسمى المكرر متناسباً متوسطاً بين الاخرين. وتسمى الثلاثة من الكميات الثلاث

متناسباً ثالثاً للاخرين

١٦٨ النسبة بالقلب ويقال لها ايضاً النسبة المكفوءة هي المساواة بين تناسب

سنقسم وتناسب بالقلب. مثالة ٤ : ٢ :: $\frac{1}{4} : \frac{1}{2}$ اي نسبة ٤ الى ٢ هي بالقلب
نسبة ٢ الى ٤ وتكتب أحياناً هكذا ٤ : ٢ :: ٢ : ٤ بالقلب. ومتى تعددت
كميات وكان تناسب الاولى الى الثانية مثل تناسب الثانية الى الثالثة وهلمّ جرّاً
لميت النسبة متصلة. مثالة ١٠ و ٨ و ٦ و ٤ و ٢ في النسبة الحسابية المتصلة . و ٦ و
٢٢ و ١٦ و ٨ و ٤ في النسبة الهندسية المتصلة. وهكذا : ب :: ب : س :: س
د :: د : ح الى اخره. والنسبة الحسابية انما هي معادلة بسيطة. مثالها ت - ب
= س - د وفي كل نسبة حسابية يكون مجموع الطرفين مائثلاً. لمجتمع الوسطين
هي ت + د = ب + س وهكذا في ١٢ - ١٠ = ٩ - ١١ ١٢ = ٩ + ١١
+ ١٠ وان كانت ثلاث كميات على نسبة حسابية يكون مجموع الطرفين مضاعف
الوسط. فاذا فرض ت - ب = ب - س يكون ت + س = ٢ ب

نبذة

في النسبة الهندسية

١٧٩ متى كانت اربع كميات على نسبة هندسية يكون حاصل الطرفين مائثلاً

الحاصل الوسطين

مفروض ت : ب :: س : د فاذا ت د = ب س لانه بالمفروض $\frac{ت}{ب} = \frac{س}{د}$

وبالمجرب ت د = ب س وهكذا ١٢ : ٨ :: ١٥ : ١٠ ١٢ × ١٠ = ٨ × ١٥

فرع اذا نُقِلَ ضلعٌ من طرفٍ الى اخر او من وسط الى اخر لا تتغير النسبة.

فاذا فرض ت : م : ب :: ك : ي تكون ت : ب :: م : ك : ي واذا فرض ن : ت :
ب :: ك : ي تكون ت : ب :: ك : ن : ي

اذا كان حاصل كيتين مائثلاً لحاصل كيتين اخريين تكون الاربع على نسبة

هندسية اذا جعل ضلعا الجانب الواحد طرفين وضلعا الجانب الاخر وسطين.

فان فرض م ي = ن ح تكون م : ن :: ح : ي وان فرض (ت + ب) × س =

(د - م) × ي تكون ت + ب : د - م :: ي : س

اذا كانت ثلاث كميات على نسبة هندسية يكون حاصل الطرفين مائثلاً لمربع

الوسط. مثالة اذا فرض ت : ب :: ب : س يكون ت س = ب^٢ فنجد متناسباً

متوسطاً بين كيتين بنجذير حاصلها . فاذا فرض ت : ك :: ك : س لنا ك^٢ =
ت س وك = $\sqrt{ت س}$

١٨٠ ينفع مما تقدم ان كل طرف من نسبه يعدل حاصل الوسطين مفسوماً على الطرف الاخر . وكل وسط يعدل حاصل الطرفين مفسوماً على الوسط الاخر

اذا فرض ت : ب :: س : د يكون ت د = ب س وت = $\frac{ب س}{د}$ د
= $\frac{ب س}{ت}$ ب = $\frac{ت د}{س}$ س = $\frac{ت د}{ب}$ فان فرض ثلاثة اجزاء
من نسبة نجد الرابع بقسمة حاصل الثاني والثالث على الاول . وقد بُني على ذلك
باب الاربعة المتناسبة في علم الحساب

١٨١ اذا كانت اربع كميات متناسبة يمكن مبادلة الطرفين او الوسطين او
جزئى كل زوج بدون تغيير النسبة لان حاصل الطرفين لا يزال مماثلاً لحاصل
الوسطين بعد هذه المعاملات

اذا فرض ت : ب :: س : د
و ١٢ : ٨ :: ٦ : ٤

فاذا بمبادلة الوسطين

ت : س :: ب : د ١٢ : ٨ :: ٦ : ٤ (اقليدس ك ٥ ق ١٦)

وبمبادلة الطرفين

د : ب :: س : ت ٤ : ٦ :: ٨ : ١٢

وبمبادلة جزئى كل زوج

ب : ت :: د : س ٨ : ١٢ :: ٤ : ٦

ويسمى هذا العمل الاخير قلباً

وبمبادلة ترتيب الزوجين

س : د :: ت : ب ١٢ : ٨ :: ٦ : ٤

ويقلب ترتيب النسبة كلها

د : س :: ب : ت ٤ : ٦ :: ٨ : ١٢

لان المعادلة من الجميع $ت = د = ب = س$ و $٨ \times ٦ = ١٢ \times ٤$ ١٨٢
لا تنتزع النسبة اذا ضرب الجزآن المتناسبان معاً او الجزآن المتشابهان
معاً في كمية واحدة او انقسما عليها

مفروض $ت : ب :: س : د$

(١) بضرب المتناسبين الاولين $م : ت :: م : ب :: س : د$

(٢) بضرب المتناسبين الاخرين $ت : ب :: م : س :: م : د$

(٣) بضرب السابقين (اقليدس ك ه ق ٣)

$م : ت :: ب : م :: س : د$

(٤) بضرب التاليين $ت : م :: ب : س :: م : د$

(٥) بقسمة الاولين $\frac{ت}{م} : \frac{ب}{م} :: \frac{س}{م} : د$

(٦) بقسمة الاخرين $ت : ب :: \frac{س}{م} : \frac{د}{م}$

(٧) بقسمة السابقين $\frac{ت}{م} : ب :: \frac{س}{م} : د$

(٨) بقسمة التاليين $ت : \frac{ب}{م} :: \frac{س}{م} : د$

فرعٌ. اذا ضرب كل واحدٍ من الاجزاء الاربعة او انقسم لا تتغير النسبة
اقليدس ك ه ق ٤

$ت : م :: م : ب :: م : س :: م : د$ $\frac{ت}{م} : \frac{ب}{م} :: \frac{س}{م} : \frac{د}{م}$

فرعٌ اخر في المعاملات الثماني المتقدمة يمكن ضرب التالي عوض قسمة
لسابق وعكسه

١٨٣ اذا عدل تناسبان تناسباً ثالثاً يكونان متساويين (اقليدس ك ه ق
(١١) (اولية ١١)

اذا فرضت $ت : ب :: م : ن$ و $س : د :: م : ن$
يكون $ت : ب :: س : د$ او $ت : س :: ب : د$

واذا فرضت : ب :: م : ن وم : ن :: س : د
 يكون ت : ب :: س : د اوت : س :: ب : د
 فرع. اذا فرضت : ب :: م : ن وم : ن < س : د
 يكون ت : ب < س : د (اقليدس ك ٥ ق ١٢)

١٨٤ اذا فرض م : ت :: ن : ب ثم بالمبادلة م : ن :: ت : ب

واذا فرض م : س :: ن : د ثم بالمبادلة م : ن :: س : د
 فحسبما تقدمت : ب :: س : د

اذا فرض م : ت :: ن : ب ثم بالقلب والمبادلة ت : ب :: م : ن
 واذا فرض س : م :: د : ن ثم بالمبادلة س : د :: م : ن فيكون
 ت : ب :: س : د حسبما تقدم

اذا فرضت : م :: ب : ن ثم بالمبادلة ت : ب :: م : ن

واذا فرض س : د :: م : ن ثم ت : ب :: م : س : د كما تقدم (اقليدس ك ٥ ق ٢٢)

١٨٥ في عدة نسب اذا كان الجزءان الآخران من الاولى الاولين من الثانية
 والآخران من الثانية الاولين من الثالثة وهلم جرا تكون نسبة الاولين من الاولى
 كنسبة الآخرين من الاخيرة. مثالة

$\left. \begin{array}{l} \text{ثم ت : ب :: ك : ي} \end{array} \right\}$	ت : ب :: س : د
	س : د :: ح : ل
	ح : ل :: م : ن
	م : ن :: ك : ي

وهكذا ان امكن تحويل النسب الى هذا الترتيب

مثالته ت : س :: ب : د بالمبادلة ت : ب :: س : د

س : ح :: د : ل بالمبادلة س : د :: ح : ل

ح : م :: ل : ن بالمبادلة ح : ل :: م : ن

م : ك :: ن : ي بالمبادلة م : ن :: ك : ي

ثم ت : ب :: ك : ي كما تقدم

١٨٦ متى كان الطرفان او الوسطان من نسبة واحدة كالطرفين او الوسطين
من اخرى تكون الاجزاء الاربعة متناسبة بالقلب

مثالۃ ت: م :: ن: ب و س: م :: ن: د ثم ت: س :: ب: د
لان ت ب = م ن و س د = م ن و ت ب = س د اي ت: س :: د: ب
وهكذا متى تشابه الطرفان. مثالۃ م: ت :: ب: ن و م: س :: د: ن ثم ت
: س :: د: ب (افليدس ك ه ق ٢٣)
واذا كانت ت: م :: ن: ب و م: س :: د: ن فيكون ت: س :: د:
ب كما تقدم

١٨٧ اذا شابهت اجزاء نسبة اجزاء نسبة اخرى يكون مجموعها او فضلتهما
متناسبة ايضاً (افليدس ك ه ق ٢) مثالۃ

اذا فرض ت: ب :: س: د
وايضاً ت: ب :: م: ن
فبالجمع ت + م: ب + ن :: س + د و ت - م: ب - ن :: س - د
وبالمبادلة ت + م: س + ن :: ب + د و ت - م: س - ن :: ب - د
وهكذا مهما تعددت النسب. مثالۃ

س: د
ج: ل
م: ن
ك: ي
مفروضات: ب ::

ثم ت: ب :: س + ح + م + ك: د + ل + ن + ي (افليدس ك ه ق ٢)

اذا فرضت ت: ب :: س: د و م: ب :: ن: د
يكون ت + م: ب + ن :: س + د لان بالمبادلة لنات: س :: ب: د
و م: ن :: ب: د فاذا ت + م: س + ن :: ب: د وبالمبادلة ت + م: ب
:: س + ن: د (افليدس ك ه ق ٢٤)

١٨٨ في النسبة الواحدة اذا اضيف احد الجزئين المتناسبين او المتشابهين الى الاخر او طرح احدهما من الاخر لا تتغير النسبة. فاذا فرضت : ب :: س : د و ١٢ : ٤ :: ٦ : ٢ ثم

(١) باضافة الجزئين الاخيرين الى الاولين

$$ت + س : ب + د :: ت : ب \quad ٤ + ١٢ : ٢ + ٤ :: ١٢ : ٤$$

$$ت + س : ب + د :: س : د \quad ٢ + ١٢ : ٤ + ٦ :: ٢ : ٦$$

$$ت + س : ت :: ب + د : ب \quad ٤ + ١٢ : ١٢ :: ٢ + ٤ : ٤$$

$$ت + س : س :: ب + د : د \quad ١٢ + ٦ : ٦ :: ٤ + ٢ : ٢$$

(٢) باضافة السابقين الى التاليين

$$ت + ب : ب :: س + د : د \quad ١٢ + ٤ : ٤ :: ٦ + ٢ : ٢$$

$$ت + ب : ت :: س + د : س \quad ١٢ + ٤ : ١٢ :: ٦ + ٢ : ٦$$

وهكذا الى اخره. ويقال لهذا العمل تركيب النسب (اقليدس ك ٥ ق ١٨)

(٣) بطرح الاولين من الاخيرين

$$س - ت : ب - د :: س : ب \quad س - ت : س :: ب - د : ب \quad د - ب : د :: س - ت : س$$

(٤) بطرح الاخيرين من الاولين (اقليدس ك ٥ ق ١٧)

$$ت - س : ب - د :: ت : ب \quad ت - س : ت :: ب - د : ب \quad س - د : س :: ب - د : ب$$

(٥) بطرح التاليين من السابقين

$$ت - ب : ب :: س - د : د \quad ت - ب : ت :: ب - د : ب \quad س - د : س :: ب - د : ب$$

ويسمى هذا الاخير قلب النسبة

(٦) بطرح السابقين من التاليين

$$ب - ت : ت :: د - س : س \quad ب - ت : ب :: د - س : د \quad س - د : س :: ب - ت : ب$$

(٧) ت + ب : ب - ت :: س + د : س - د اي مجتمع الاولين الى

فضلتها كمجتمع الاخيرين الى فضلتها

فرع اذا كانت اربع كميات مركبة متناسبة كما في الامثلة المتقدمة تكون البسيطة التي تركبت منها متناسبة ايضاً. فاذا فرضت : ب : ب + ت :: س : د تكون

ت : ب :: س : د ويسمى هذا العمل قسمة النسبة (أقليدس ك ٥ ق ١٧)

١٨٩ اذا ضُرِبَتْ اجزاء نسبة في اجزاء نسبة اخرى كل جزء في نظيره تكون
المواصل متناسبة ايضاً. مثالة

$$\begin{array}{lcl} \text{ت : ب :: س : د} & ١٢ : ٤ :: ٦ : ٢ & \\ \text{و ح : ل :: م : ن} & ١٠ : ٥ :: ٨ : ٤ & \\ \hline \text{ت ح : ب ل :: س م : د ن} & ١٢٠ : ٢٠ :: ٤٨ : ٨ & \end{array}$$

وهكذا مهما تعددت النسب. مثالة

$$\begin{array}{l} \text{ت : ب :: س : د} \\ \text{ح : ل :: م : ن} \\ \hline \text{ف : ق :: ك : ي} \end{array}$$

ت ح ف : ب ل ق :: س م ك : د ن ي

وهكذا اذا ترقّت اجزاء نسبة الى اية قوة فُرِضَتْ. مثالة

$$\begin{array}{lcl} \text{ت : ب :: س : د} & ٢ : ٤ :: ٦ : ١٢ & \\ \text{ت : ب :: س : د} & ٢ : ٤ :: ٦ : ١٢ & \\ \hline \text{ت : ب :: س : د} & ٤ : ١٦ :: ٢٦ : ١٤٤ & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{وايضاً : ت : ب :: س : د} \\ \text{و ن : م :: ل : ح} \\ \text{و ت : ب :: س : د} \end{array}$$

١٩٠ اذا انقسمت اجزاء نسبة على اجزاء نسبة اخرى تكون الخواص

متناسبة. مثالة

$$\begin{array}{lcl} \text{ت : ب :: س : د} & ١٢ : ٦ :: ١٨ : ٩ & \\ \text{ح : ل :: م : ن} & ٦ : ٢ :: ٩ : ٣ & \\ \hline \text{ت : ب :: س : د} & \frac{١٢}{٣} : \frac{٦}{٣} :: \frac{١٨}{٣} : \frac{٩}{٣} & \end{array}$$

١٩١ في تركيب بعض النسب يمكن افناء الاجزاء المتساوية واخراجها قبل الضرب لاجل اختصار العمل. مثاله

$$\begin{array}{r} \text{ت : ب :: س : د} \\ \text{م : ت :: ت : س} \\ \hline \text{ت م : ب ت :: س ن : س د} \end{array}$$

فاذا م : ت :: ن : د وهكذا

$$\begin{array}{r} \text{ت : ب :: س : د} \\ \text{ب : ح :: د : ل} \\ \text{ح : م :: ل : ن} \\ \hline \text{ت : م :: س : ن} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ٢ : ٩ :: ٤ : ١٢ \\ ٦ : ٣ :: ٨ : ٤ \\ ١٥ : ٦ :: ٢٠ : ٨ \\ \hline ١٥ : ٩ :: ٢٠ : ١٢ \end{array}$$

١٩٢ متى كانت اربع كميات متناسبة فاذا كانت الاولى اعظم من الثانية تكون الثالثة اعظم من الرابعة واذا كانت مثلها فمثلها او اصغر فاصغر

$$\left. \begin{array}{l} \text{ت = ب} \\ \text{ت < ب} \\ \text{ت > ب} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{س = د} \\ \text{س < د} \\ \text{س > د} \end{array}$$

ت : ب :: س : د فاذا

فرع اذا كانت الاولى اعظم من الثالثة تكون الثانية اعظم من الرابعة (اقليدس ك ه ق ١٤) فان فرضت : ب :: س : د فبالمبادلة : س :: ب : د وحينئذ ان كان ت = ب يكون س = د الى اخره

فرع ثان اذا فرضت : ت :: م :: س : ن
وم : ب :: ن : د فان كان ت = ب تكون س = د
الى اخره (اقليدس ك ه ق ٢٠) لان بالتركيب : ت : ب :: س : د ومن ثم ان كان ت = ب تكون س = د الى اخره

$$\left. \begin{array}{l} \text{وهكذا ان فرض} \\ \text{ت : م :: ن : د} \\ \text{م : ب :: س : ن} \end{array} \right\}$$

فان كانت = ب يكون س = د الى اخره (اقليدس ك ٥ ق ٢١)
اذا كانت اربع كيات متناسبة تكون مكفوءاتها متناسبة ايضاً. فاذا فرض
ت : ب :: س : د يكون ت : ب :: س : د لان الحاصل من تحويلها
كليهما هوت د = ب س

نبذة

في النسبة المتصلة

١٩٣ في النسبة المتصلة (١٦٨) تكون جميع التناسبات متساوية. فاذا
فُرض ت : ب :: ب : س :: س : د :: د : هـ يراد ان تناسب ت : ب يعدل
تناسب ب : س وتناسب س : د الى اخره. وتناسب الاولى الى الاخيرة يعدل
الحاصل من التناسبات المتوسطة بينهما اي تناسب ت : هـ يعدل $\frac{ت}{ب} \times \frac{ب}{س} \times \frac{س}{د} \times \frac{د}{هـ}$
 $\frac{س}{د} \times \frac{د}{هـ}$ ولكن هذه التناسبات كلها متساوية فيمكن الضرب في آيتها
شيئت اي $\frac{ت}{ب} \times \frac{ب}{س} \times \frac{س}{د} \times \frac{د}{هـ} = \frac{ت}{هـ}$ فيكون ت : هـ :: ت : ب^٤
ولنا من ذلك هذه القاعدة

وهي اذا كانت عدة كيات على نسبة متصلة تكون نسبة الاولى الى الاخيرة كنسبة
احد التناسبات المتوسطة مرقاة الى قوة دليلها اقل من عدة الكيات بواحد. مثاله
اذا فُرض ت : ب :: ب : س :: س : د :: د : هـ تكون ت : س :: ت : ب^٢ وان فرض
ت : ب :: ب : س :: س : د :: د : هـ تكون ت : هـ :: ت : ب^٤

١٩٤ اذا كانت عدة كيات على نسبة متصلة تكون متناسبة ايضاً اذا
انعكس ترتيبها حسب ما تقدم (١٨١) فاذا فُرض

٤	٨	١٦	٣٢	٦٤	
	٢	٢	٢	٢	فالتناسبات
٦٤	٣٢	١٦	٨	٤	وبالعكس
	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	فالتناسبات

اي متى انعكس ترتيب الكميات تكون التناسبات مكفوءات التناسبات المستقيمة ومكفوءات كميات متساوية هي متساوية كما يتضح من الاولية الرابعة

مسائل

(١) اقسام ٦٠ الى قسمين تكون نسبة حاصلها الى مجموع مربعيها كنسبة ٢ الى ٥

لنفرض $ك = قسما$ و $٦٠ - ك = القسم الاخر$

(١) بالشروط $٦٠ - ك = ك : ٢$: $ك : ٢$: $٢٦٠٠ - ١٢٠ = ك : ٢ :: ٥ : ٢$

(٢) بالتحويل الى معادلة $٢٠٠ - ك = ٥ = ك : ٤$: $٤ = ك : ٢٤٠ - ٧٢٠٠ + ك$

(٣) بالمقابلة والقسمة $ك - ٦٠ = ٨٠٠$

(٤) بالتام التوزيع والتجذير والمقابلة $ك = ٤٠$: $٤٠ - ٦٠ = ٢٠$

(٢) اقسام ٤٩ الى قسمين تكون نسبة اكبرها مع ستة الى الاصغر الا احد عشر كنسبة ٢ : ٩

لنفرض $ك = الاكبر$ و $٤٩ - ك = الاصغر$

بالشروط $ك + ٦ : ٢٨ - ك :: ٢ : ٩$

باضافة السابقين الى التاليين $ك + ٦ : ٤٤ :: ٩ : ١١$

بقسمة التاليين $ك + ٦ : ٤ :: ٩ : ١$

ثم بالتحويل $ك + ٦ = ٣٦$: $ك = ٣٠$

(٣) اي عدد اذا اضيف اليه ١ ثم ٥ ثم ١٢ تكون نسبة المجموع الاول : الثاني :: الثاني : الثالث

لنفرض العدد ك

ثم بالشروط $ك + ١ : ك + ٥ :: ك + ٥ : ك + ١٢$

بالطرح $ك + ١ : ٤ :: ك + ٥ : ٨$

بقسمة التاليين $ك + ١ : ١ :: ك + ٥ : ٢$

ثم $ك + ٢ = ٢$: $ك + ٥ = ٢$: $ك = ٣$

(٤) ما عددان نسبة اكبرها الى الاصغر كجسميها الى ٤٢ وكفضلتهما الى ٦

لنفرض العددين ك وى
 ثم بالشرط الاول ك : ى :: ك + ى : ٤٢
 وبالثاني ك : ى :: ك - ى : ٦
 بالمساواة ك + ى : ٤٢ :: ك - ى : ٦
 بقلب الوسطين ك + ى : ك - ى :: ٤٢ : ٦
 بالجمع والطرح ٢ ك : ٢ ى :: ٤٨ : ٢٦
 بالقسمة ك : ى :: ٤ : ٢
 ٢ ك = ٤ ى ك = $\frac{٤}{٢}$ ى ثم بالتعويض في النسبة الثانية لنا
 ٢٤ = ى ٢٢ = ك

(٥) اقسام ١٨ الى قسمين بين مربعيهما نسبة ٢٥ : ١٦

لنفرض القسمين ك و١٨ - ك
 ثم بالشروط ك : (١٨ - ك) :: ٢٥ : ١٦
 بالتجذير ك : ١٨ - ك :: ٥ : ٤
 بالجمع ك : ١٨ :: ٥ : ٩
 بالقسمة ك : ٢ :: ٥ : ١٠ = ك

(٦) اقسام ١٤ الى قسمين تكون نسبة الخارج من قسمة الاكبر على الاصغر الى الخارج من قسمة الاصغر على الاكبر كنسبة ١٦ : ٩

لنفرض اكبرها ك والاصغر ١٤ - ك
 بشروط $\frac{ك}{١٤ - ك} : \frac{١٤ - ك}{ك} :: ١٦ : ٩$
 بالضرب ك : (١٤ - ك) :: ١٦ : ٩
 بالتجذير ك : ١٤ - ك :: ٤ : ٣
 بالجمع ك : ١٤ :: ٤ : ٧
 بالقسمة ك : ٢ :: ٤ : ٨ = ك

(٧) اقسام ٢٠ الى قسمين بينها نسبة ٣ المالية الى ١ المالية واستعلم متناسبا
 توسطاً بينها

لنفرض احدهما ك والاخر ٢٠ - ك

بالشروط ك : ٢٠ - ك : ٣ : ١ : ٩ :: ١ : ٩

بالجمع ك : ٢٠ : ٩ : ١٠ : ك = ١٨ والاخر = ٢ والمتناسب المتوسط

$$٦ = \sqrt{١٨ \times ٢} = (١٧٩ \text{ حسب})$$

(٨) اي عدد ين حاصلها ٢٤ ونسبة فضلة كعبيها الى كعب فضلنها كنسبة

١ : ١٩

لنفرض ك احدهما وى والاخر

بالمفروض كى = ٢٤

وايضاً ك - ى : (ك - ى) : ١٩ :: ١ : ١٩

بالبسط ك - ى : ك - ى : ٢ - كى + ٢ كى - ى : ١٩ :: ١ : ١٩

بالطرح (١٨٨) ٢ ك - ى : ٢ ك - ى : ٢ كى - ى : (ك - ى) : ١٨ :: ١ : ١٨

بالقسمة على ك - ى : ٢ كى : (ك - ى) : ١٨ :: ١ : ١٨

٢ كى = ٢٤ × ٢ = ٧٢ حسب المفروض

فبالنعويض ٧٢ : (ك - ى) : ١٨ :: ١ : ١٨

بالضرب والقسمة (ك - ى) = ٤ ك - ى = ٢ كى = ٢٤ ك =

ى = ٤

(٩) مفروض (ت + ك) : (ت - ك) : ك + ى : ك - ى

هات البرهان من ذلك على ان ت : ك :: ٣٦ - ت - ى : ٣٦ - ى

بالبسط ت + ٢ ت + ك + ك : ت - ٢ ت + ك + ك : ك + ى : ك - ى

بالجمع والطرح ٢ ت + ٢ ك : ٤ ت : ٢ ك : ٢ ك - ى

بالقسمة ت + ك : ٢ ت : ٢ ك : ك - ى

بنقل ك ت + ك : ٢ ت : ٢ ك : ك - ى

بقلب الوسطين ت + ك : ٢ ك : ٢ ت : ك - ى

بالطرح ت : ك : ٢ ت - ى : ى

بالنجزير ت : ك :: ٣٦ - ت - ى : ٣٦ - ى

(١٠) مفروض ك : ى :: ت : ب

وايضاً ت : ب :: $\overline{\text{أ} + \text{س}} : \overline{\text{أ} + \text{د}}$:: $\overline{\text{أ} + \text{س}} : \overline{\text{أ} + \text{د}}$:: $\overline{\text{أ} + \text{س}} : \overline{\text{أ} + \text{د}}$

هات البرهان على ان دك = س ي

بالترقية ت : ب :: $\overline{\text{أ} + \text{س}} : \overline{\text{أ} + \text{د}}$:: $\overline{\text{أ} + \text{س}} : \overline{\text{أ} + \text{د}}$:: $\overline{\text{أ} + \text{س}} : \overline{\text{أ} + \text{د}}$

بالمساواة س + ك : د + ي :: ك : ي

بقلب الوسطين س + ك : ك :: د + ي : ي

بالطرح س : ك :: د : ي

ثم دك = س ي

(١١) مفروض $\frac{\text{ت} - \text{ك}}{\text{ب}} = \text{ت} \text{ برهن ان ت + ك : ت}$

:: ت : ب : ت - ك

(١٢) مفروض ك : ي :: ٣٦ : ٢٥ ونسبة ٢ ك + ي : ك + ٢ كالنسبة

المركبة من ١٧ : ٢ و ٢ : ٧ فاجي قيمة ك وي الجواب ك = ١٢ ي = ١٠

(١٣) مطلوب ثلاثة اعداد على نسبة متصلة اوسطها ٦٠ ومجموع الطرفين

الجواب ٤٥ ٦٠ ٨٠

١٢٥

(١٤) ما اعدادان حاصلها ١٢٥ وفضلها مربعيهما الى مربع فضلتهما :: ٤ : ١

الجواب ١٥ و ٩

(١٥) ما اعدادان نسبة فضلتهما ومجموعهما وحاصلها كنسبة ٢ و ٣ وه

الجواب ١٠ و ٢

(١٦) اقسام ٢٤ الى قسمين نسبة حاصلها الى مجموع مربعيهما :: ٢ : ١٠

الجواب ١٨ و ٦

(١٧) مزيج من خمر وماء كانت فيه نسبة فضلتهما : الماء :: ١٠٠ : الخمر

ونفس هذه الفضلة الى الخمر :: ٤ : الماء. فكم في المزيج من الصنفين

الجواب خمر ٢٥ ماء ٥

(١٨) ما اعدادان نسبة احدهما الى الاخر :: ٣ : ٢ واذا اضيف ٦ الى الاكبر

وطرح ٦ من الاصغر فيكون المجموع الى الفضلة :: ٣ : ١ الجواب ٢٤ و ١٦

(١٩) ما عددان حاصلها ٢٢٠ ونسبة فضلة كعيبيها الى كعب فصلتها ::

الجواب ٢٠ و ١٦

١ : ٦١

(٢٠) ما عددان نسبة احدهما الى الاخر كالنسبة المائلة بين ٤ و ٢

الجواب ٢٢ و ١٨

والتناسب المتوسط بينهما هو ٢٤



الفصل الرابع عشر

في التغير او النسبة العمومية

١٩٥ قد يحدث احياناً ان اجزاء نسبة يتعلق بعضها ببعض حتى يتغير احدها بتغير اخر منها فتحفظ النسبة . مثاله ان يقال ان ثمن ٥٠ ذراعاً من قاشٍ = ١٠٠ غرش فان طُرِحَ من الاذرع ١٠ نصير ٤٠ فطُرِحَ من الثمن ٢٠ فيصير ٨٠ وان صارت الاذرع ٣٠ يصير الثمن ٦٠

اي	ذ	ذ	ذ	ذ
٥٠	٤٠	::	١٠٠	٨٠
و	٥٠	::	٣٠	٦٠
و	٥٠	::	٢٠	٤٠

وهلم جراً

فكلما تغير نالي الزوج الاول بتغير مثله نالي الثاني حتى تبقى النسبة محفوظة . اذا فُرض سابقان ت وب وفرضت كمية من جنس ت ولكن اكبر منها او اصغر . وب كمية من جنس ب اكبر او اصغر مراراً مساوية للاحاد التي في فضلة ت وت فتكون ت : ت :: ب : ب فان تغيرت ت وصارت ت بتغير ب وتغير ب ويقال ان ت تغيرت بتغير ب او بالاختصاص ان تاء كباء كما يقال ان اجرة فاعلي تتغير كتغير مئة عمله وان ربح مبلغ يتغير كتغير راس المال . ولنا هنا جزآن من نسبة وكل نسبة لها اربعة اجزاء . فاذا قولنا السابق انما هو عبارة مختصرة بذكر جزئين من النسبة عوض الاربعة . ولو بسطنا العبارة لقولنا نسبة راس مال : راس مال اخر :: ربح الاول : ربح الثاني

١٩٦. نحتاج في بعض المسائل التعليمية او الفلسفية الى معرفة نسبة شيء الى خربدون معرفة قيمتها الخصوصية. ويكفي لذلك جزءاً نسبياً غير أنه ينبغي ان نذكر كون الجزئين الآخرين متضمنين في المذكورين. كما لو قيل ان ثقل الماء هو بالنسبة الى مقداره فإنه يراد به ان رطلاً : عدة ارطال مفروضة :: ثقل رطل : ثقل لارطال المفروضة ويدل على نسبته بين كميات غير ثابتة بهذه العلامة — مثالها ت — ب فيراد ان ت تتغير كتغير ب اي ان ت : ت :: ب : ب ويقال لهذه العبارة ي ت — ب نسبة عمومية

١٩٧ متى زادت كمية عند زيادة اخرى او نقصت عند نقصانها قيل ان الاولى تغيرت كالاخرى بالاستقامة. فان رتبة دين مثلاً يزيد او ينقص بالنسبة الى اس المال فان تضاعف راس المال تضاعف الرباه وهلمّ جراً. واذا نقصت كمية عند زيادة اخرى او بالعكس قيل ان الاولى تتغير كالثانية بالقلب. مثالها ان الوقت الذي فيه الفاعل يجمع مبلغاً يكون بالقلب كاجرتي اي كلما زادت الاجرة قل الوقت وبالقلب

١٩٨ متى زادت كمية او نقصت كزيادة حاصل كميتين او نقصانها قيل انها تغيرت كتغيرها معاً. مثالها رتبة دين يتغير كحاصل راس المال في الوقت. فان تضاعف راس المال وتضاعف الوقت زاد الرباه اربعة امثال. ومتى كانت كمية متناسبة ابتداء مع اخرى مقسومة على كمية ثالثة قيل انها تتغير بالاستقامة كالثانية وبالقلب كالثالثة. مثاله ان كانت ت : ت :: س : س تكون ت — س فنرى ما سبق ان هذا الباب لا يلزم له شيء سوى ان يقاس على قواعد النسبة المتقدم ذكرها. وان النسبة العمومية انما هي عبارة مختصة يذكر فيها جزآن من اربعة اجزاء نسبة. وان اشكل شيء من مسائله يوضح جلياً بذكر الجزئين المخدوفين

١٩٩ يتضح ما سبق انه يمكن عكس ترتيب الاجزاء في نسبة عمومية كما في نسبة خصوصية. فان كان ت — ب فكذلك ب — ت لان ت : ت :: ب : ب اذا ب : ب :: ت : ت

وان ضرب جزء او جزآن من نسبة عمومية في كمية واحدة ثابتة او انقسما عليها ولا تتغير النسبة (١٨٢) مثاله

اذا فرضت : ت :: ب : ب اي ت س ب فيكون م : ت : م ت :: ب : ب
 اي م ت س ب وم ت : م ت :: م : ب : م ب اي م ت س م ب الخ
 وهكذا ان ضرب كلا الجزوين في كمية غير ثابتة او انقسما عليها لا تتغير النسبة.
 فان فرض م كمية متغيرة وت : ت :: ب : ب اي ت س ب يكون م : ت : م ت
 :: م : ب : م ب اي م ت س م ب

فرع اول اذا تغيرت كمية كاخرى يكون الخارج من قسمة احداها على الاخرى
 كمية ثابتة كما يتضح من انه اذا تغيرت صورة كسر كتنغير مخرجو لا تتغير قيمته
 مثاله ت : ت :: ب : ب اي ت س ب اذا $\frac{ت}{ب} : \frac{ت}{ب} :: \frac{ب}{ب} : \frac{ب}{ب}$
 :: ١ : ١ ::

فرع ثان اذا كان حاصل كيتين ثابتا تتغير احداها كمكفوه الاخرى. مثاله
 ت ب : ت ب :: ١ : ١ يكون $\frac{ت}{ب} : \frac{ت}{ب} :: \frac{١}{ب} : \frac{١}{ب}$ او ت : ت :: ب : ب
 $\frac{١}{ب} : \frac{١}{ب}$

فرع ثالث يمكن نقل كمية من احد جزوي نسبة عمومية الى الاخر. فاذا كان
 مضروباً فيه في احدها يصير مقسوماً عليه في الاخر. مثاله ت س ب س يكون ايضا
 $\frac{ت}{ب} - س$ وان كان ت س $\frac{١}{د}$ يكون ت س س $\frac{١}{د}$

٢٠٠ اذا تغيرت كلتا كيتين كالثالثة تتغير احداها كالاخرى

مثاله ت : ت :: ب : ب
 س : س :: ب : ب
 اذا ت : ت :: س : س
 اي ت س ب
 اي س ب ب
 اي ت س س

واذا تغيرت كيتان كالثالثة يتغير مجموعها وفضلتهما ايضا كالثالثة. مثاله اذا
 فرض

ت : ت :: ب : ب
 وس : س :: ب : ب
 اي ت س ب
 اي س س ب

فأذا ت + س : ت + س :: ب : ب اي ت + س س ب و ت - س :
 ت - س :: ب : ب اي ت - س س ب
 وهكذا تعددت الكميات التي تتغير ككمية واحدة. مثالة اذا فرض ت
 ب وس س ب ود س ب وي س ب
 فان (ت + س + د + ي) س ب

واذا تغير مربع مجموع كيتين كربع فضلنها بتغير مجموع مربعيها كحاصلها.
 فان فرض (ت + ب) س (ت - ب) يكون ت + ب س ت ب لان
 بالمفروض (ت + ب) س : (ت - ب) س :: (ت + ب) س : (ت - ب) س
 بالسطر والجمع والطرح حسب ما تقدم في النسبة لنا
 ٢ ت + ٢ ب : ٤ ت ب :: ٢ ت + ٢ ب : ٤ ت ب
 وبالقسمه ت + ب : ت ب :: ت + ب : ت ب اي ت + ب س ت ب
 ٢٠١ قد يمكن ايضا ان تضرب اجزاه نسبة عمومية في اجزاء اخرى او تقسم عليها

اي ت س ب	ت : ت :: ب : ب	فان فرض
اي س س د	وس : س :: د : د	
اي ت س س ب د	ت س : ت س :: ب د : ب د	اذا

فرع اذا تغيرت كلتا كيتين كالثالثة بتغير حاصل الاثنين كربع الاخرى
 مثالة اذا فرض

ت س ب
و س س ب
اذا ت س س ب

واذا تغيرت كمية كاخرى بتغير اية قوة او اي جذر فرض من الواحدة مثل
 ذلك الجذر او تلك القوة من الاخرى (ع٢١)

مثالة اذا فرض
 يكون
 و ت : ت :: ب : ب اي ت س ب

١٩١ في تركيب بعض النسب يمكن افناء الاجزاء المتساوية واخراجها قبل الضرب لاجل اختصار العمل. مثاله

$$\begin{array}{r} \text{ت : ب :: س : د} \\ \text{م : ت :: ت : س} \\ \hline \text{ت م : ب ت :: س ن : س د} \end{array}$$

فاذا م : ت :: ن : د وهكذا

$$\begin{array}{r} \text{ت : ب :: س : د} \\ \text{ب : ح :: د : ل} \\ \text{ح : م :: ل : ن} \\ \hline \text{ت : م :: س : ن} \end{array}$$

١٩٢ متى كانت اربع كميات متناسبة فاذا كانت الاولى اعظم من الثانية تكون الثالثة اعظم من الرابعة واذا كانت مثلها فمثلها او اصغر فاصغر

$$\left. \begin{array}{l} \text{ت = ب} \\ \text{ت < ب} \\ \text{ت > ب} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{س = د} \\ \text{س < د} \\ \text{س > د} \end{array} \quad \text{فاذا} \quad \text{ت : ب :: س : د}$$

فرع اذا كانت الاولى اعظم من الثالثة تكون الثانية اعظم من الرابعة (اقليدس ك ه ق ١٤) فان فرضت : ب :: س : د فبالمبادلة : ت : س :: ب : د وحينئذ ان كان ت = ب يكون س = د الى اخره

فرع ثان اذا فرضت : م :: س : ن
وم : ب :: ن : د فان كان ت = ب تكون س = د
الى اخره (اقليدس ك ه ق ٢٠) لان بالتركيب : ت : ب :: س : د ومن ثم ان كان ت = ب تكون س = د الى اخره

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ت : م :: ن : د} \\ \text{م : ب :: س : ن} \end{array} \right.$$

فان كانت = ب يكون س = د الى اخره (اقليدس ك ٥ ق ٢١)
اذا كانت اربع كميات متناسبة تكون مكفوءاتها متناسبة ايضاً. فاذا فرض
ت : ب :: س : د يكون $\frac{1}{ت} : \frac{1}{ب} :: \frac{1}{س} : \frac{1}{د}$ لان الحاصل من تحويلها
كلها هوت د = ب س

نبذة

في النسبة المتصلة

١٩٢ في النسبة المتصلة (١٦٨) تكون جميع التناسبات متساوية. فاذا
فُرض ت : ب :: ب : س :: س : د :: د : هـ يراد ان تناسب ت : ب يعدل
تناسب ب : س وتناسب س : د الى اخره. وتناسب الاولى الى الاخيرة يعدل
الحاصل من التناسبات المتوسطة بينها اي تناسب ت : هـ يعدل $\frac{ت}{ب} \times \frac{ب}{س} \times \frac{س}{د} \times \frac{د}{هـ}$
 $\frac{ت}{هـ}$ ولكن هذه التناسبات كلها متساوية فيمكن الضرب في أيها
شيئت اي $\frac{ت}{ب} \times \frac{ب}{س} \times \frac{س}{د} \times \frac{د}{هـ} = \frac{ت}{هـ}$ فيكون ت : هـ :: ت : ب^٤
ولنا من ذلك هذه القاعدة

وهي اذا كانت عدة كميات على نسبة متصلة تكون نسبة الاولى الى الاخيرة كنسبة
احد التناسبات المتوسطة مرقاة الى قوة دليلها اقل من عدة الكميات بواحد. مثالة
اذا فرض ت : ب :: ب : س تكون ت : س : ب : ت : ب^٢ وان فرض
ت : ب :: ب : س :: س : د :: د : هـ تكون ت : هـ :: ت : ب^٤

١٩٤ اذا كانت عدة كميات على نسبة متصلة تكون متناسبة ايضاً اذا
انعكس ترتيبها حسب ما تقدم (١٨١) فاذا فرض

٦٤	٣٢	١٦	٨	٤	
٣	٣	٣	٣		فالتناسبات
٤	٨	١٦	٣٢	٦٤	وبالعكس
$\frac{1}{٤}$	$\frac{1}{٨}$	$\frac{1}{١٦}$	$\frac{1}{٣٢}$	$\frac{1}{٦٤}$	فالتناسبات

اي متى انعكس ترتيب الكميات تكون التناسبات مكفوءات التناسبات المستقيمة ومكفوءات كميات متساوية هي متساوية كما يتضح من الاولية الرابعة

مسائل

(١) اقسام ٦٠ الى قسمين تكون نسبة حاصلها الى مجموع مربعيها كنسبة ٢ الى ٥

لنفرض $ك = قسما$ و $٦٠ - ك = القسم الاخر$

(١) بالشروط $٦٠ - ك : ك :: ٢ : ٥$ $ك = ٢٦٠٠ - ١٢٠ : ٥ :: ٢ : ٥$

(٢) بالتحويل الى معادلة $٢٠٠ - ك = ٥ : ك = ٤$ $ك = ٢٤٠ - ٧٢٠٠ + ٤$

(٣) بالمقابلة والقسمة $٦٠ - ك = ٨٠٠ -$

(٤) بالتام التوزيع والتجذير والمقابلة $٤٠ = ٦٠ - ٤٠ = ٢٠$

(٢) اقسام ٤٩ الى قسمين تكون نسبة اكبرها مع ستة الى الاصغر الا احد عشر كنسبة ٢ : ٩

لنفرض $ك = الاكبر$ $٤٩ - ك = الاصغر$

بالشروط $ك + ٢٨ : ٦ - ك :: ٢ : ٩$

باضافة السابقين الى التاليين $ك + ٦ : ٤٤ :: ٩ : ١١$

بقسمة التاليين $ك + ٦ : ٤ :: ٩ : ١$

ثم بالتحويل $ك + ٦ = ٣٦$ $ك = ٣٠$

(٣) اي عدد اذا اضيف اليه ١ ثم ٥ ثم ١٢ تكون نسبة المجموع الاول : الثاني :: الثاني : الثالث

لنفرض العدد ك

ثم بالشروط $ك + ١ : ك + ٥ :: ك + ٥ : ك + ١٢$

بالطرح $ك + ١ : ٤ :: ك + ٥ : ٨$

بقسمة التاليين $ك + ١ : ١ :: ك + ٥ : ٢$

ثم $ك + ٢ = ٢ + ك = ٥$ $ك = ٣$

(٤) ما عددان نسبة اكبرها الى الاصغر كجانبينها الى ٤٢ وكفضلتها الى ٦

لنفرض العددين ك وى
 ثم بالشروط الاول ك : ى :: ك + ى : ٤٢
 وبالثاني ك : ى :: ك - ى : ٦
 بالمساواة ك + ى : ٤٢ :: ك - ى : ٦
 بقلب الوسطين ك + ى : ك - ى :: ٤٢ : ٦
 بالجمع والطرح ٢ ك : ٢ ى :: ٤٨ : ٢٦
 بالقسمة ك : ى :: ٤ : ٢
 ٢ ك = ٤ ى ك = $\frac{٤}{٢}$ ى ثم بالتعويض في النسبة الثانية لنا
 ٢٤ = ى ٢٢ = ك

(٥) اقس ١٨ الى قسمين بين مربعيهما نسبة ٢٥ : ١٦
 لنفرض القسمين ك و١٨ - ك
 ثم بالشروط ك : (١٨ - ك) :: ٢٥ : ١٦
 بالتجذير ك : ١٨ - ك :: ٥ : ٤
 بالجمع ك : ١٨ :: ٥ : ٩
 بالقسمة ك : ٢ :: ٥ : ١٠ = ك
 (٦) اقس ١٤ الى قسمين تكون نسبة الخارج من قسمة الاكبر على الاصغر
 الى الخارج من قسمة الاصغر على الاكبر كنسبة ١٦ : ٩

لنفرض اكبرها ك والاصغر ١٤ - ك
 بشروط $\frac{ك}{١٤ - ك} : \frac{١٤ - ك}{ك} :: ١٦ : ٩$
 بالضرب ك : (١٤ - ك) :: ١٦ : ٩
 بالتجذير ك : ١٤ - ك :: ٤ : ٣
 بالجمع ك : ١٤ :: ٤ : ٧
 بالقسمة ك : ٢ :: ٤ : ٨ = ك

(٧) اقس ٢٠ الى قسمين بينهما نسبة ٢ المالية الى ١ المالية واستعلم متناسبا
 متوسطا بينهما

لنفرض احدهما ك والاخر ٢٠ - ك

بالشروط ك : ٢٠ - ك : ٣ : ١ : ٩ :: ١ : ٩

بالجمع ك : ٢٠ : ٩ :: ١٠ : ٩ : ك = ١٨ والاخر = ٢ والمتناسب المتوسط

$$٦ = \sqrt{١٨ \times ٢} = (١٧٩ \text{ حسب})$$

(٨) اي عددین حاصلها ٢٤ ونسبة فضلة كعبيها الى كعب فضلتهما كنسبة

١ : ١٩

لنفرض ك احدهما وى الاخر

بالمفروض كى = ٢٤

وايضاً ك - ى : (ك - ى) : ١٩ :: ١ : ١٩

بالبسط ك - ى : ك - ى : ٢ - كى + ٢ كى - ى : ١٩ :: ١ : ١٩

بالطرح (١٨٨) ٢ ك - ى : ٢ كى - ى : (ك - ى) : ١٨ :: ١ : ١٨

بالقسمة على ك - ى : ٢ كى : (ك - ى) : ١٨ :: ١ : ١٨

٢ كى = ٢٤ × ٢ = ٧٢ حسب المفروض

فبالنعويض ٧٢ : (ك - ى) : ١٨ :: ١ : ١٨

بالضرب والقسمة (ك - ى) = ٤ : ك - ى = ٢ : كى = ٢٤ : ك = ١

ى = ٤

(٩) مفروض (ت + ك) : (ت - ك) : ك + ى : ك - ى

هات البرهان من ذلك على ان ت : ك :: ٢٢ - ت - ى : ٢٢ - ى

بالبسط ت + ٢ ت + ك + ك : ت - ت - ٢ ت + ك + ك : ك + ى : ك - ى

بالجمع والطرح ٢ ت + ٢ ك : ٢ ت + ٢ ك : ٤ ت : ٢ ك : ٢ : ٢

بالقسمة ت + ك : ٢ ت + ك : ٢ ت : ٢ ك : ى

بنقل ك ت + ك : ٢ ت : ٢ ت : ٢ ك : ى

بقلب الوسطين ت + ك : ٢ ك : ٢ ت : ٢ ت : ى

بالطرح ت : ٢ ك : ٢ ت - ى : ى

بالتجذير ت : ك :: ٢٢ - ت - ى : ٢٢ - ى

(١٠) مفروض ك : ى :: ت : ب

وايضاً ت : ب :: $\overline{٢٢} + \overline{٢٢} : \overline{٢٢} + \overline{٢٢}$

هات البرهان على ان $دك = سي$

بالترقية ت : ب :: $\overline{٢٢} + \overline{٢٢} : \overline{٢٢} + \overline{٢٢}$

بالمساواة س : ك : د + د :: ي : ك : ي

بقلب الوسطين س : ك : د + د :: ي : ك : ي

بالطرح س : ك :: د : ي

ثم $دك = سي$

(١١) مفروض $\frac{ت - ٢٢}{ب} = ٤$ ت برهن ان ت + ك : ٢

:: ٢ : ت - ك

(١٢) مفروض ك : ي :: ٣٦ : ٢٥ ونسبة ٢ ك + ي : ك + ٢ كالنسبة

المركبة من ١٧ : ٢ و ٢ : ٧ فاجي قيمة ك وي الجواب ك = ١٢ ي = ١٠

(١٣) مطلوب ثلاثة اعداد على نسبة متصلة اوسطها ٦٠ ومجموع الطرفين

الجواب ٤٥ ٦٠ ٨٠

١٢٥

(١٤) ما اعدادان حاصلها ١٢٥ وفضلة مربعيها الى مربع فضلتهما :: ٤ : ١

الجواب ١٥ و ٩

(١٥) ما اعدادان نسبة فضلتهما ومجموعهما وحاصلهما كنسبة ٢ و ٣ و

الجواب ١٠ و ٢

(١٦) اقس ٢٤ الى قسمين نسبة حاصلهما الى مجموع مربعيها :: ٢ : ١٠

الجواب ١٨ و ٦

(١٧) مزيج من خمر وماء كانت فيه نسبة فضلتهما : الماء :: ١٠٠ : الخمر

ونفس هذه الفضلة الى الخمر :: ٤ : الماء. فكم في المزيج من الصنفين

الجواب خمر ٣٥ ماء ٥

(١٨) ما اعدادان نسبة احدهما الى الاخر ٣ : ٢ واذا اضيف ٦ الى الاكبر

وطرح ٦ من الاصغر فيكون المجموع الى النصف ١ : ٢ الجواب ٢٤ و ١٦

(١٩) ما عددان حاصلها ٢٢٠ ونسبة فضلة كعيبيها الى كعب فصلتها:

الجواب ٢٠ و ١٦

١ : ٦١

(٢٠) ما عددان نسبة احدهما الى الاخر كالنسبة المائلة بين ٤ و ٢

الجواب ٢٢ و ١٨

والمتناسب المتوسط بينهما هو ٢٤



الفصل الرابع عشر

في التغير او النسبة العمومية

١٩٥ قد يحدث احبانا ان اجزاء نسبة يتعلق بعضها ببعض حتى يتغير احدها بتغير اخر منها فتحتفظ النسبة . مثاله ان يقال ان ثمن ٥٠ ذراعاً من قماش = ١٠٠ غرش فان طرّح من الاذرع ١٠ نصير ٤٠ فيطرّح من الثمن ٢٠ فيصير ٨٠ وان صارت الاذرع ٣٠ يصير الثمن ٦٠

اي	٥٠	:	٤٠	::	١٠٠	:	٨٠
و	٥٠	:	٣٠	::	١٠٠	:	٦٠
و	٥٠	:	٢٠	::	١٠٠	:	٤٠

وهلمّ جراً

فكلما تغير نالي الزوج الاول بتغير مثله نالي الثاني حتى تبقى النسبة محفوظة . اذا فرض سابقان ت وب وفرضت كمية من جنس ت ولكن اكبر منها او اصغر . وب كمية من جنس ب اكبر او اصغر مراراً مساوية للاحاد التي في فضلة ت وت فتكون ت : ت :: ب : ب فان تغيرت ت وصارت ت بتغير ب وت نصير ب ويقال ان ت تغيرت بتغير ب او بالاختصار ان تاء كباء كما يقال ان اجرة فاعل تغيرت كتغير مة علمه وان ربح مبلغ بتغير كتغير راس المال . ولنا هنا جزان من نسبة وكل نسبة لها اربعة اجزاء . فاذا قولنا السابق انما هو عبارة مختصرة بذكر جزئين من النسبة عوض الاربعة . ولو بسطنا العبارة لقلنا نسبة راس مال : راس مال اخر :: ربح الاول : ربح الثاني

١٩٦ نحتاج في بعض المسائل التعليمية او الفلسفية الى معرفة نسبة شيء الى اخر بدون معرفة قيمتهما الخصوصية. ويمكن ذلك جزاً نسبة غير انه ينبغي ان نذكر كون المجزئين الآخرين متضمنين في المذكورين. كما لو قيل ان ثقل الماء هو بالنسبة الى مقداره فانه يراد به ان رطلاً : عدة ابطال مفروضة :: ثقل رطل : ثقل الارطال المفروضة ويدل على نسبة بين كميات غير ثابتة بهذه العلامة - مثالها ت - ب فيراد ان ت تتغير كتنغير ب اي ان ت : ت :: ب : ب ويقال لهذه العبارة اي ت - ب نسبة عمومية

١٩٧ متى زادت كمية عند زيادة اخرى او نقصت عند نقصانها قيل ان الاولى تغيرت كالاخرى بالاستقامة. فان رتبة دين مثلاً يزيد او ينقص بالنسبة الى راس المال فان تضاعف راس المال تضاعف الرتبة وهلمّ جراً. واذا نقصت كمية عند زيادة اخرى او بالعكس قيل ان الاولى تتغير كالثانية بالقلب. مثالها ان الوقت الذي فيه الفاعل يجمع مبلغاً يكون بالقلب كاجرتو اي كلما زادت الاجرة قلّ الوقت وبالقلب

١٩٨ متى زادت كمية او نقصت كزيادة حاصل كميتين او نقصان قيل انها تغيرت كتنغيرها معاً. مثالها رتبة دين يتغير كحاصل راس المال في الوقت. فان تضاعف راس المال وتضاعف الوقت زاد الرتبة اربعة امثال. ومتى كانت كمية متناسبة ابداً مع اخرى مقسومة على كمية ثالثة قيل انها تتغير بالاستقامة كالثانية وبالقلب كالثالثة. مثاله ان كانت ت : ت :: ب : ب تكون ت - ب فنرى ما سبق ان هذا الباب لا يلزم له شيء سوى ان يقاس على قواعد النسبة المتقدم ذكرها. وان النسبة العمومية انما هي عبارة مختصة بذكر فيها جزءان من اربعة اجزاء نسبة. وان اشكل شيء من مسائله يوضح جلياً بذكر المجزئين الخذوفين

١٩٩ يتضح مما سبق انه يمكن عكس ترتيب الاجزاء في نسبة عمومية كما في نسبة خصوصية. فان كان ت - ب فكذلك ب - ت لان ت : ت :: ب : ب اذا ب : ب :: ت : ت

وان ضرب جزء او جزءان من نسبة عمومية في كمية واحدة ثابتة او انقسما عليها ولا تتغير النسبة (١٨٣) مثاله

اذا فرضت : ت :: ب : ب اي ت س ب فيكون م ت : م ت :: ب : ب
 اي م ت س ب وم ت : م ت :: م ب : م ب اي م ت س م ب الخ
 وهكذا ان ضرب كلا الجزئين في كمية غير ثابتة او انقسما عليها لا تتغير النسبة
 فان فرض م كمية متغيرة وت : ت :: ب : ب اي ت س ب يكون م ت : م ت ::
 م ب : م ب اي م ت س م ب

فرع اول اذا تغيرت كمية كاخرى يكون الخارج من قسمة احدها على الاخرى
 كمية ثابتة كما يتضح من انه اذا تغيرت صورة كسر كمتغير مخرجوه لا تتغير قيمته
 مثاله ت : ت :: ب : ب اي ت س ب اذا $\frac{ت}{ب} : \frac{ت}{ب} :: \frac{ت}{ب} : \frac{ت}{ب}$
 ١ : ١ ::

فرع ثان اذا كان حاصل كيتين ثابتا تتغير احدها كمكفوه الاخرى. مثالا
 ت ب : ت ب :: ١ : ١ يكون $\frac{ت}{ب} : \frac{ت}{ب} :: \frac{١}{ب} : \frac{١}{ب}$ او ت : ت ::
 $\frac{١}{ب} : \frac{١}{ب}$

فرع ثالث يمكن نقل كمية من احد جزوي نسبة عمومية الى الاخر. فاذا كان
 مضروباً فيه في احدها يصير مقسوماً عليه في الاخر. مثاله ت س ب س يكون ايضا
 $\frac{ت}{ب} - س$ وان كان ت س $\frac{١}{د}$ يكون ت س $\frac{١}{د}$

٢٠٠ اذا تغيرت كلتا كيتين كالثالثة تتغير احدها كالاخرى

مثاله ت : ت :: ب : ب	اي ت س ب
س : س :: ب : ب	اي س س ب
اذا ت : ت :: س : س	اي ت س س

واذا تغيرت كيتان كالثالثو يتغير مجموعها وفضلتها ايضا كالثالثة. مثاله اذا

فرض

ت : ت :: ب : ب	اي ت س ب
وس : س :: ب : ب	اي س س ب

فأذا ت + س : ت + س :: ب : بَ اي ت + س س ب و ت - س :
 ت - س :: ب : بَ اي ت - س س ب
 وهكذا نعددت الكميات التي تتغير ككمية واحدة. مثالة اذا فرض ت
 ب وس س ب ود س ب وي س ب
 فان (ت + س + د + ي) س ب

واذا تغير مربع مجموع كميتين كمربع فضلتهما بتغير مجموع مربعيهما كحاصلهما.
 فان فرض (ت + ب) س (ت - ب) يكون ت + ب س ت ب لان
 بالمفروض (ت + ب) : (ت - ب) :: (ت + ب) : (ت - ب)
 باليسط والجمع والطرح حسب ما تقدم في النسبة لنا
 ٢ ت + ٢ ب : ٤ ت ب :: ٢ ت + ٢ ب : ٤ ت ب
 وبالقسمه ت + ب : ت ب :: ت + ب : ت ب اي ت + ب س ت ب
 ٢٠١ قد يمكن ايضا ان تضرب اجزاء نسبة عمومية في اجزاء اخرى او تقسم عليها

اي ت س ب	ت : ت :: ب : بَ	فان فرض
اي س د	وس : س :: د : دَ	
اي ت س س ب د	ت س : ت س :: ب د : ب دَ	اذا

فرع اذا تغيرت كلتا كميتين كالثاني بتغير حاصل الاثنين كمربع الاخرى

مثالة اذا فرض
 و س س ب
 اذا ت س س ب

واذا تغيرت كمية كاخرى بتغير اية قوتها او اي جذر فرض من الواحدة مثل
 ذلك المجذر او تلك القوة من الاخرى (ع٢١)

مثالة اذا فرض
 يكون
 و ت : ت :: ب : بَ اي ت س ب

٢٠٢ في تركيب نسب عمومية يمكن طرح كميات متساوية من الجزئين

مثالة ت : ت :: ب : ب
اي ت س ب
وب : ب :: س : س
اي ب س س
وس : س :: د : د
اي س س د
اذا ت : ت :: د : د
اي ت س د

فرع اذا تغيرت كمية كنانية والثانية كالثالثة والثالثة كرابعة وهلم جرا فالاولى
تتغير كالاخيرة. مثالة اذا فرضت س ب س س د فان ت س د واذا
فرضت س ب س س فان ت س س اي ان تغيرت الاولى كالثانية والثانية
كمكفوء الثالثة فالاولى تتغير كمكفوء والثالثة

٢٠٣ اذا تغيرت كمية كحاصل كيتين اخريين وكانت احدي الاخريين
ثابتة فالاولى تتغير كالاخرى الغير الثابتة. مثالة

اذا فرضت ك س ل ب وكانت ب ثابتة فاذا ك س ل ومثال ذلك ايضا ثقل
اللوح فانه يتغير كتغير طول وعرض وعمقه فان بقي العمق على ما هو كان تغير
ثقله كتغير طول وعرضه

فرع وهكذا مها تعددت الكميات. فان فرض
ك س ل ب ط
فان جعلت ل ثابتة ك س ب ط
وان جعلت ل ب ثابتة ك س ط

وان كانت قيمة كمية متوقفة على اخريين وان فرضت الثانية تتغيرت الاولى
كالثالثة وان فرضت الثالثة تتغيرت الاولى كالثانية فالاولى تتغير كحاصل الاخريين.
مثالة ان تغير ثقل لوح كالأطول مع عرض مفروض وكالعرض مع طول مفروض
ثم ان تغير الطول والعرض بتغير الثقل كحاصلها. وهكذا مها تعددت الكميات
اذا تغيرت كمية كاخري تكون الاولى مساوية للثانية في كمية ما ثابتة. فان كان
ت س ب فلا بد ان تكون نسبة ت : ب ثابتة. وقد يمكن ان تضرب ب في كمية ما

حتى يكون المحاصل ت وان كانت نسبة ربح ١٠٠ غرش : رأس المال :: ١ : ٢٠٠
يكون لربح ١٠٠ غرش او ١٠٠٠ غرش نفس هذه النسبة الى رأس المال
تنبيه. ان لفظة مفروض في مسائل هذا الباب ولا سيما في الفلسفة الطبيعية يراد
بها كميات ثابتة كما انه في غير هذا الباب يراد بها كميات معروفة لتمييزها من المجهولة



الفصل الخامس عشر

في السلسلة الحسابية والهندسية

٢٠٤ السلسلة ويقال لها النسبة المتصلة نوعان حسابية وفيها كلامنا الان
وهندسية وسيا في الكلام عليها. اما الحسابية فهي عبارة عن طائفة من الكميات تعلو
او تهبط بزيادة كمية مفروضة او طرحها على التوالي. مثالها ٢ ٤ ٦ ٨ ١٠
وهكذا بالعكس ١٠ ٨ ٦ ٤ ٢ ويقال للاولى سلمة صاعدة وللثانية
سلمة نازلة

٢٠٥ في السلسلة الصاعدة توجد كل حلقة باضافة الفضل المشترك الى ما
قبلها. فان كانت الحلقة الاولى ٢ والفضل المشترك ٢ تكون السلسلة ٢ ٤ ٦ ٨ ١٠ ١٢
الى اخر. وان كانت الحلقة الاولى ت والفضل المشترك د تكون
الحلقة الثانية ت + د والثالثة ت + د + د اي ت + ٢ د والرابعة ت + ٣ د
+ د اي ت + ٤ د والخامسة ت + ٥ د + د اي ت + ٦ د وهم جراً. وتكون
السلسلة ت وت + د وت + ٢ د وت + ٣ د وت + ٤ د الى اخر.
وان كانت الحلقة الاولى والفضل المشترك متساويين اي الحلقة الاولى ت والفضل
المشترك ت نصير الثانية ت + ت اي ٢ ت والثالثة ٢ ت + ت اي ٣ ت الى
اخر. فتكون السلسلة ت ٢ ت ٣ ت ٤ ت الخ

وفي السلسلة النازلة توجد كل حلقة بطرح الفضل المشترك من التي قبلها فان
كانت الحلقة الاولى ت والفضل المشترك د تكون السلسلة ت - د
ت - ٢ د ت - ٣ د ت - ٤ د الخ

ثم ان هذا العمل بطول بنا جداً في سلسلة طويلة ولكن اذا نظرنا الى سلسلة

مثل ت ت + د ت + د ت + د ت + د الى اخره نرى ان د
اضيفت الى ت مراراً فمائل عدة الحلقات الا واحداً لان

الحلقة الثانية هي ت + د

والتالثة ت + د

والرابعة ت + د الى اخره

فتكون الحلقة الخمسون ت + د

والحلقة المائة ت + د

وان كانت نازلة تكون ت - د

اي ان د تضاف الى ت مراراً فمائل عدة الحلقات الا واحداً. فان فرض ت =
الحلقة الاولى ول = الاخيرة وع = عدد الحلقات وف = الفضل المشترك فلنال
= ت + (ع - ١) × ف

٢٠٦ لنا مما سبق هذه القاعدة وهي ان الحلقة الاخيرة من السلسلة الحسائية
تعدل الحلقة الاولى مضافة الى حاصل الفضل المشترك في عدة الحلقات الا واحداً.
وهكذا توجد اية حلقة فُرِضَتْ بان تحسبها الحلقة الاخيرة فتدل عليها العبارة السابقة
ثم ان كانت الحلقة الاولى والفضل المشترك متساويين نصير العبارة ل = ت +
(ع - ١) × ت = ت + ت - ت اي ل = ت ع

٢٠٧ نرى في العبارة السابقة اربع كميات اي ت الحلقة الاولى ل الاخيرة
ع عدد الحلقات ف الفضل المشترك. فان فُرِضَ منها ثلاث يمكن ان توجد منها
الاخرى

(١) لنا كما تقدم ل = ت + (ع - ١) ف = الاخيرة

(٢) بالمقابلة ل - (ع - ١) × ف = ت = الاولى

(٣) بالمقابلة والقسمة في الاولى $\frac{ل - ت}{ع - ١} = ف =$ الفضل المشترك

(٤) ايضاً بالمقابلة والقسمة في الاولى $\frac{ل - ت}{ف} + ١ = ع =$ عدد

الحلقات

ومن المعادلة الثالثة توجد اية عدة فرضت من اوساط حسابية بين عدد بين
 دن عدة الحلقات تماثل الطرفين مع جميع الحلقات المتوسطة بينها. فان فرض ط
 = عدة الاوساط يكون ط + ٢ = ع اي عدة الحلقات. ثم بوضع ط + ٢ عوض ع
 في المعادلة الثالثة تصير $\frac{ل - ت}{ط + ١} = ف = الفضل المشترك$

مفروض الحلقة الاولى من سلسلة صاعدة ٧ والفضل المشترك ٢ وعدة الحلقات
 ٩ فاما في الاخير

$$ل = ت + (ع - ١) ف = ٧ + (١ - ٩) \times ٢ = ٣١$$

والسلسلة ٧ ١٠ ١٣ ١٦ ١٩ ٢٢ ٢٥ ٢٨ ٣١

مفروض الحلقة الاخير من سلسلة صاعدة ٦٠ وعدة الحلقات ١٢ والفضل
 المشترك ٥ فاما في الاولى

$$ت = ل - (ع - ١) ف = ٦٠ - (١٢ - ١) \times ٥ = ٥$$

خذ سنة اوساط حسابية بين ١ و ٤٢

الفضل المشترك ٦ والسلسلة ١ ٧ ١٣ ١٩ ٢٥ ٣١ ٣٧ ٤٣

٢٠٨ يلزم احياناً معرفة مجموع حلقات سلسلة ويتوصل اليها بجمع الحلقات
 لا محالة. ولكن لنا طريقة اخصر من ذلك وهي انه لا بد ان يكون مجموع سلسلة
 صاعدة مثل ٣ ٥ ٧ ٩ ١١

مساوياً لمجموع سلسلة نازلة ١١ ٩ ٧ ٥ ٣

فيكون مجموع الاثنين مضاعف مجموع احدها فنجد بمجموعها مضاعف مجموع
 احدها. ثم ان اخذ نصفه يكون مجموع احدها

فلنفرض ٣ ٥ ٧ ٩ ١١

وعكسها ١١ ٩ ٧ ٥ ٣

يكون المجموع ١٤ ١٤ ١٤ ١٤ ١٤

وهكذا } ت + د ت + د ت + د ت + د ت + د
 وعكسها } ت + د ت + د ت + د ت + د ت + د
 المجموع ٢٤ + د ٢٤ + د ٢٤ + د ٢٤ + د ٢٤ + د

فلما من ذلك هذه القضية وهي ان مجموع طرفي سلسلة يعدل مجموع ابني حلفتين فرضنا على بعدي واحد من الطرفين . ولكي نجد مجموع الحلقات في السلسلتين لا يلزم الا ان تضرب مجموع الطرفين في عدد الحلقات اي $14 + 14 + 14 = 0 \times 14 = 14 + 14$

وفي الثابتة يكون المجموع $(2 + 4) \times 0$ وهذا مضاعف مجموع حلقات سلسلة واحدة . ثم ان فرض $ت =$ الاولى $ل =$ الاخيرة $ع =$ عدد الحلقات وم = مجموع الحلقات لنا $م = \frac{ل + ت}{2} \times ع$ وهذه المعادلة مشتملة على هذه القاعدة وهي ان مجموع حلقات سلسلة حسابية يعدل نصف مجموع الطرفين في عدد الحلقات

ما هو مجموع سلسلة الاعداد الطبيعية اي ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ الى ١٠٠٠
الجواب م = $\frac{ل + ت}{2} \times ع = \frac{١٠٠٠ + ١}{2} \times ١٠٠٠ = ٥٠٠٥٠٠$

ثم ان عوضنا عن ل في هذه المعادلة بقيمتها في ع نصير المعادلة
(١) $م = \frac{ت^2 + (١ - ع) ف}{2} \times ع$ وفيها اربع كميات اي الحلقة الاولى والفضل المشترك وعدة الحلقات ومجموعها . وان فرض منها ثلاث نجد منها الرابعة . فبالتحويل نصير

$$(٢) ت = \frac{٢٢ + ف ع - ٢ ع ف}{ع ٢} = \text{الحلقة الاولى}$$

$$(٣) ف = \frac{ع ٢ - ٢٢}{ع - ٢ ع} = \text{الفضل المشترك}$$

$$(٤) ع = \frac{٢(ت - ف) + ٨ ف - ٢ ت + ٢ ف}{٢ ف}$$

(١) مفروض الحلقة الاولى من سلسلة صاعدة ٢ والفضل المشترك ٢ وعدد الحلقات ٢٠ فاهو مجموعها
الحواب ٤٤٠

(٢) اذا وضع مائة حجر على خط مستقيم بين كل اثنين منها ذراع واحد فكم

بشي من يجمع الجميع في مكان بينه وبين الحجر الاول ذراع اذا كان كل مرة يحل
جراً واحداً الجواب ١٠١٠٠ ذراع

(٣) ما هو مجموع ١٥٠ حلقة من سلسلة صاعدة مثل $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}$

الجواب ٢٧٧٥

$\frac{0}{3}, 2, \frac{7}{3}$ الى اخره

(٤) اذا كان مجموع سلسلة حسابية ١٤٥٥ والحلقة الاولى ٥ وعدد الحلقات

الجواب ٢

٣٠ فاهو الفضل المشترك

(٥) مجموع سلسلة ٥٦٧ والحلقة الاولى ٧ والفضل المشترك ٢ فاهو عدد

الجواب ٢١

الحلقات

(٦) ما هو مجموع ٢٢ حلقة من هذه السلسلة $1, \frac{1}{3}, 2, \frac{1}{3}, 1$

الجواب ٢٨٠

الخ ٢

(٧) رجل اشترى ٤٧ كتاباً وكان ثمن الاول ١٠ غروش وثن الثاني ٢٠

غرشاً والثالث ٥٠ غرشاً وهلم جراً فكم بلغ ثمن الجميع

الجواب ٢٢٠٩٠ غرشاً

(٨) رجل اعطى صدقة للفقراء في اليوم الاول من السنة غرشاً وفي الثاني

غرشين وفي الثالث ثلاثة غروش وهلم جراً فكم اعطى في السنة

الجواب ٦٦٧٩٥

(٩) رجل اشترى اثواباً وكان ثمن الاول دينارين والثاني ٤ والثالث ٦ وهلم

جراً الى اخره وبلغ ثمن الجميع ١١٠ دنانير فكم ثوباً اشترى الجواب ١ اثواب

٢٠٩ في سلسلة اعداد وترية مثل $1, 3, 5, 7, 9$ الى اخره تكون

الحلقة الاخيرة اقل بواحد من مضاعف عدد الحلقات ابداً لان $ل = ت + ١$

(ع - ١) ف حسباً تقدم وفي السلسلة المفروضة $ت = ١$ و $ف = ٢$ فتكون

المعادلة $ل = ١ + (ع - ١) \times ٢ = ٢ع - ١$ وكذلك في سلسلة اعداد وترية

مثل $1, 3, 5, 7, 9$ الى اخره مجموع الحلقات يعدل مربع عدد الحلقات

لان $م = \frac{1}{2} (ت + ل) \times ع$ وفي هذه السلسلة $ت = ١$ وحسباً تقدم $ل = ٢ع$

١ - فتصير المعادلة $m = \frac{1}{4}(1 + c^2 - c) = c = c^2$

مثالة $\left\{ \begin{array}{l} 4 = 3 + 1 \\ 9 = 5 + 2 + 1 \\ 16 = 7 + 5 + 2 + 1 \end{array} \right.$ مربعات عدد الحلقات

٢١٠. اذا كان صفان من كميات في سلسلة حساية تكون مجموعاتها او فضلاتها ايضاً على سلسلة حساية لان ذلك جمع تناسبات او طرحها فقط

مثالة $\begin{array}{cccccccc} 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 & 24 \end{array}$ التناسب = 3

$\begin{array}{cccccccc} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \end{array}$ التناسب = 2

المجموع $\begin{array}{cccccccc} 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 & 35 & 40 \end{array}$ التناسب = 5

الفضلة $\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}$ التناسب = 1

واذا ضرب جميع حلقات سلسلة حساية في كمية واحدة او انقسم عليها تكون المحاصل او المخارج على سلسلة حساية ايضاً لان ذلك كضرب تناسبات او قسمتها

في سلسلة $\begin{array}{cccccc} 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \end{array}$ اذا ضرب في 4

تصير $\begin{array}{cccccc} 12 & 20 & 28 & 36 & 44 & 52 \end{array}$ ثم اذا انقسم هذا على 2

تصير $\begin{array}{cccccc} 6 & 10 & 14 & 18 & 22 & 26 \end{array}$ الى اخره

(١) مطلوب اربعة اعداد على سلسلة حسائية مجموعها ٥٦ ومجموع مربعاتها ٨٦٤

ك = الثاني $y =$ الفضل المشترك فتكون السلسلة ك - y ك + y

ك + $2y$

وبالشروط $(ك - y) + (ك + y) + (ك + y) + (ك + 2y) = 56$

وايضاً $(ك - y)^2 + (ك + y)^2 + (ك + y)^2 + (ك + 2y)^2 = 864$

بالاولى $4ك + 2y = 56$

بالثانية $4ك + 4y + 6y = 864$

وتحويل هذه المعادلات لنا $ك = 12$ $y = 4$

والاعداد $8 \ 12 \ 16 \ 20$

(٣) ثلاثة اعداد في سلسلة حسابية مجموعها ٩ ومجموع كعوبها ١٥٢ فما هي هذه الاعداد
الجواب ١ و ٢ و ٥

(٣) ثلاثة اعداد في سلسلة حسابية مجموعها ١٥ ومجموع مربعي الطرفين ٥٨
فما هي الاعداد

(٤) اربعة اعداد في سلسلة حسابية مجموع مربعي الاولين ٢٤ ومجموع مربعي
الآخرين ١٢٠ فما هي الاعداد
الجواب ٢ ٥ ٧ ٩

(٥) لنان نجد عددًا ذا ثلاثة ارقام على سلسلة حسابية واذا انقسم العدد على
مجموع ارقامه يكون الخارج ٢٦ واذا اضيف اليه ١٩٨ ينقلب ترتيب الارقام

لنفرض الارقام ك- ي و ك و ك+ ي فيكون العدد ١٠٠ (ك- ي)
 $١٠ + ك + (ك + ي) = ١١١ ك - ٩٩ ي$

$$\text{وبالشروط} \quad \frac{١١١ ك - ٩٩ ي}{٣} = ٢٦$$

و $١١١ ك - ٩٩ ي = ١٩٨ + ١٠٠ (ك + ي) + ١٠ ك + (ك - ي)$
 $ك = ٣ ي = ١$ والعدد ٢٣٤

(٦) لنان نجد اربعة اعداد في سلسلة حسابية مجموع مربعي الطرفين فيها
٢٠٠ ومجموع مربعي الوسطين ١٢٦

(٧) ساع سعي الى مكان بعده ١٩٨ ميلاً. ففي اليوم الاول قطع من المسافة
٣٠ ميلاً وفي الثاني ٢٨ ميلاً وفي الثالث ٢٦ ميلاً وهم جراً في كم يوم قطع المسافة
كلها

الحلقة الاولى = ٣٠ الفضل المشترك = ٢ - الجواب ٩

(٨) مطلوب اعداد على سلسلة حسابية فضلها المشترك ٢ ومجموعها يعدل
عدة الحلقات ثمان مرات واذا اضيف ١٢ الى الحلقة الثانية وانقسم المجموع على عدة
الحلقات يكون الخارج الحلقة الاولى

لنفرض ك = الاولى ي = عدة الحلقات ك + ٢ = الثانية ك + (١ - ي)
= ٢ الاخيرة

$$\text{حسباً تقدم م} = \frac{٢ + (١ - ع) ف}{٢} \times ع = ت = ك ي = ع$$

$$\text{ثم بالتعويض م} = \frac{٢ + (١ - ي) ك}{٢} \times ي = ك ي + ي - ي$$

$$\text{وبالمسئلة ك ي + ي - ي = ٨ ي ي = ٩ - ك}$$

$$\text{وأيضاً } \frac{١٢ + ٢ + ك}{ك - ٩} = ك = ٥ \text{ أو } ٢$$

$$ي = ٤ \text{ أو } ٦$$

والاعداد ٥ ٧ ٩ ١١ أو ٣ ٥ ٧ ٩ ١١ ١٣

(٩) لئان نجد اربعة اعداد على سلسلة حسابية مجموعها ٢٨ وحاصلها ٥٨٥

في السلسلة الهندسية

٢١١ السلسلة الهندسية هي نسبة هندسية متصلة كما ان الحسابية هي نسبة

حسابية متصلة. فالاعداد ٦٤ ٢٢ ١٦ ٨ ٤ هي على نسبة هندسية

متصلة ع٢٢. واذا انقسم كل جزء على التناسب المشترك بخارج الجزء الذي يتلوه.

مثال $\frac{٦٤}{٢} = ٣٢$ و $\frac{٢٢}{٢} = ١١$ و $\frac{١٦}{٢} = ٨$ الى اخره. وهكذا اذا انعكس

الترتيب وصار المقسوم عليه المشترك مضروباً فيه. مثال $\frac{٢٢}{٨} = ٢$ و $\frac{١٦}{٨} = ٢$ و $\frac{٤}{٨} = ٠$

٦٤ الى اخره $\frac{٦٤}{٤} = ١٦$ و $\frac{٢٢}{٤} = ٥$ و $\frac{١٦}{٤} = ٤$ و $\frac{٨}{٤} = ٢$ و $\frac{٤}{٢} = ٢$

= الخ

ولنا من ذلك هذه القضية وهي ان الكميات التي تهبط بمقسوم عليه مشترك او

تعلو بضرب فيه مشترك فهي على سلسلة هندسية. ويسمى المقسوم عليه او المضروب

فيه التناسب المشترك. وان جعلنا المقسوم عليه كسراً يمكن ان نحسبه المضروب فيه

ابداً كما في السلسلة السابقة فانها تهبط بالقسمة على ٢ او بالضرب في $\frac{١}{٢}$

٢١٢ في السلسلة الهندسية الصاعدة تُعرف كل حلقة بضرب التناسب

المشترك في التي قبلها. فان فرضت الاولى ت والتناسب المشترك ب تكون الحلقات

على هذا النسق ت × ب = ت ب = الثانية ت × ب = ت ب = الثالثة

ت ب × ب = ت ب = الرابعة ت ب × ب = ت ب = الخامسة الخ وتكون

السلسلة ت ت ب ت ب ت ب ت ب الخ
 وإذا كانت الأولى والتناسب متساويين تكون السلسلة سرّد قوّات اي تكون
 الأولى ب والتناسب ب فتكون السلسلة ب ب ب ب ب ب الخ
 ٢١٣ في السلسلة النازلة توجد كل حلقة بقسمة التي قبلها على التناسب
 المشترك او ضربها في التناسب المشترك الكسري. فان كانت الحلقة الأولى ت ب^١
 بالقسمة على ب تصير ت ب^١ او بالضرب في ب تصير ت ب^١ × ب^١

$$\frac{ت ب^1}{ب} = ت ب^1$$

وتكون السلسلة ت ب^١ ت ب^٢ ت ب^٣ ت ب^٤ ت ب^٥ ت ب^٦ الخ
 وان كانت الأولى ت والتناسب ب تكون السلسلة ت ب^١ ت ب^٢ ت ب^٣ ت ب^٤ ت ب^٥ ت ب^٦ الخ

$$\frac{ت}{ب} = \frac{ت ب^1}{ب^2} = \frac{ت ب^2}{ب^3} = \frac{ت ب^3}{ب^4} = \frac{ت ب^4}{ب^5} = \frac{ت ب^5}{ب^6}$$

 نظرنّا الى السلسلة ت ت ب ت ب ت ب ت ب ت ب الخ

نرى ان دليل القوة في كل حلقة اقل من عدد تلك الحلقة بواحد. فنرى في الثانية
 الدليل ١ وفي الثالثة الدليل ٢ وهلم جرا. فان فرض ت = الحلقة الأولى ل =
 الاخيرة ب = التناسب وع = عدد الحلقات لنا ل = ت ب^{١-ع} فلنا من
 ذلك هذه القضية وهي ان الحلقة الاخيرة من سلسلة هندسية تعدل الحلقة الأولى
 مضروبة في قوة من التناسب دليلها اقل من عدد الحلقات بواحد. ومتى كانت
 الأولى والتناسب متساويين نصير المعدلة ل = ت ب^{١-ع} = ب^{١-ع}

٢١٤ اذا عُرِفَت ثلاث من الكميات المذكورة اي من ت ب ل ع تُعرَف
 منها الاخرى

(١) لنا ماسبق ل = ت ب^{١-ع} = الاخيرة

(٢) بالقسمة $ت = \frac{ل}{ب^{١-ع}}$ = الأولى

(٣) بالقسمة والتجذير $ب = \left(\frac{ل}{ت}\right)^{\frac{١}{١-ع}}$ = التناسب

اما عدة الحلقات فتوجد من هذه المعادلة بالانساب اي الغرثات وليس هذا موضعاً لذكر طريقها

ثم اننا بالمعادلة الاخيرة نجد اية علة فُرِضَتْ من اوساط هندسية بين عددين .
فان فرض $ط =$ الاوساط يكون $ط + ٢$ عدد الحلقات اي $ط + ٢ = ع$ ثم
يعوض عن ع في المعادلة بنميتها فتصير $ب = \left(\frac{١}{٢}\right) ط + ١$ ومتى عرفنا
التناسب نجد الاوساط بالضرب

ع ١ خذ وسطين هندسيين بين ٤ و ٢٥٦
التناسب = ٤ والسلسلة ٤ ١٦ ٦٤ ٢٥٦

ع ٢ خذ ثلاثة اوساط هندسية بين $\frac{١}{٤}$ و $\frac{١}{٢}$ الجواب $\frac{١}{٣}$ ١ ٢
٢١٥ فلننظر الان الى كيفية جمع سلسلة هندسية فنرى انه اذا ضُرِبَتْ
حلقة في التناسب يحصل حلقة اخرى . فان ضُرِبَ جميع الحلقات على هذا الاسلوب
تحصل سلسلة جديدة شبيهة بالاولى الا في الحلقة الاولى والاخرية

مثال ٢ ٤ ٨ ١٦ ٢٢
بالضرب في التناسب ٤ ٨ ١٦ ٢٢ ٦٤

فان طرحنا الثانية من الاولى لا يبقى سوى الحلقة الاولى من الاولى والاخرية
من الثانية . وهكذا ان فُرِضَ ت ت ت ت ب ت ب ت ب ت ب ع - ١
فان ضربت كل حلقة في ب نصيرت ب ت ب ت ب ت ب ت ب ت ب ع - ١
ت ب ع وان فُرِضَ م = مجموع الحلقات فلنا م = ت + ت + ت + ت ب
+ ت ب + ت ب ع - ١ وبالضرب في ب م = ت ب + ت ب + ت ب + ت ب
+ ت ب ع - ١ + ت ب ع

وبطرح الاولى من الثانية يبقى ب م - م = ت ب ع - ت

وبالقسمة على ب - ١ $م = \frac{ت ب ع - ت}{١ - ب}$

وت ب ع هي الحلقة الاخيرة من سلسلة جديدة وهي تساوي حاصل التناسب

في الحلقة الأخيرة من السلسلة المفروضة اي ب ل

$$\frac{b - l}{1 - b} = \text{ثم بالتعويض م}$$

فلما ماسبق هذه القاعدة لاستعلام مجموع حلقات سلسلة هندسية وهي ان تاخذ حاصل التناسب في الاخيرة ثم تطرح منه الاولى ونقسم الباقي على التناسب الا واحداً (١) سلسلة هندسية فيها الحلقة الاولى ٦ والاخيرة ١٤٥٨ والتناسب ٣ فا

هو مجموع الحلقات الجواب م = $\frac{ب-ل-ث}{1-ب} = \frac{7-1408 \times 2}{1-2}$

(٢) سلسلة نازلة كانت فيها الحلقة الاولى $\frac{1}{n}$ والتناسب $\frac{1}{m}$ وعدد

الحلقات ٥ فها هو مجموع السلسلة

الحلقة الأخيرة = ت ب^{ع-1} = $\frac{1}{2} \times (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$

$$\frac{121}{162} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{162} \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \text{والمجموع}$$

(٢) ما هو مجموع هذه السلسلة ١ ٢ ٩ ٢٧ الى اخره الى ١٢ حلقة

الجواب ٢٦٥٧٢٠

(٤) ما هو مجموع عشر حلقات من هذه السلسلة $\frac{2}{3}$ ا $\frac{4}{9}$

الحجواب

$$\frac{1}{57} \text{ الخ}$$

٢١٦ كميات على سلسلة هندسية هي مناسبة لفضلاتها

لنفرض سلسلة ت ت ب ت ب ت ب ت ب الح فحسب كيفية
السلسلة ت : ت ب :: ت ب : ت ب :: ت ب : ت ب :: ت ب : ت ب الى
اخره . ثم في كل زوج يطرح السابق من تاليه فتصير : ت ب :: ت ب - ت ب - ت
: ت ب - ت ب :: ت ب - ت ب - ت ب - ت ب الح
اي نسبة الاولى الى الثانية كنسبة فضلا الاولى والثانية الى فضلا الثانية والثالثة .
وكسبة فضلا الثانية والثالثة الى فضلا الثالثة والرابعة وهم جراً الى اخره

فرع إذا كانت كميات على سلسلة هندسية تكون فضلاتها أيضاً على سلسلة هندسية

مثال ٢ ٩ ٢٧ ٨١ ٢٤٣ الى اخره
وفضلاتها ٦ ١٨ ٥٤ ١٦٢ ايضاً على سلسلة

مسائل

(١) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة هندسية مجموعها ١٤ ومجموع مربعاتها ٨٤

لنفرض الاعداد ك وى ول

بالشروط ك : ى :: ى : ل اي ك ل = ى

و ك + ى + ل = ١٤ وك + ى + ل = ٨٤ الاعداد ٢ و ٤ و ٨

(٢) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة هندسية حاصلها ٦٤ ومجموع كعابها ٥٨٤

ك = الحلقة الاولى وى = التناسب فتكون السلسلة ك ك ى ك ى

بالشرط الاول ك × ك ى × ك ى = ٦٤

بالتاني ك + ك ى + ك ى = ٥٨٤ ك = ٢ ى = ٢

والاعداد ٢ ٤ ٨

(٣) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة هندسية مجموع الاول والثالث ٥٢

ومربع الوسط ١٠٠ الجواب ٢ ١٠ ٥٠

(٤) مطلوب اربعة اعداد على سلسلة هندسية مجموع الاولين ١٥ ومجموع

الاخيرين ٦٠ لنفرض السلسلة ك ك ى ك ى ك ى فنجد

الاعداد ٥ ١٠ ٢٠ ٤٠

(٥) رجل قسم ٢١٠ دينار بين بنو الثلاثة وكانت اقسامهم على سلسلة

هندسية. وكان للاول ٩٠ ديناراً اكثر من الاخير فكم كان قسم كل واحد منهم

(٦) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة هندسية وفضلة اكبرها واصغرها ١٥

ونسبة فضلة مربعي الاكبر والاصغر الى مجموع مربعات الاعداد الثلاثة :: ٥ : ٧

الجواب ٥ ١٠ ٢٠

(٧) مطلوب اربعة اعداد على سلسله هندسية الثانية منها اقل من الرابعة
باربعة وعشرين ونسبة مجموع الطرفين : مجموع الوسطين :: ٧ : ٢

الجواب ١ ٢ ٩ ٢٧

(٨) رجل استخدم خادماً الى مدة ١١ سنه . ووعد ان يعطيه في السنة الاولى
حبة قمح وغلة هذه الحبة في الثانية وغلة الغلة في الثالثة وهلم جرّاً الى نهاية المئة
المذكورة . فان اثمرت كل حبة عشر حبات كل سنة فكم حبة تبلغ

الجواب ١١١١١١١١١١٠

(٩) رجل هندي اخترع الشطرنج وقدمه الى الملك فاعجبه جداً وقال له
مهما طلبت اعطيك . فطلب الرجل حبة قمح للبيت الاول من رقعة الشطرنج
وحبتين للثاني واربع حبات للثالث وثمانى للرابع وهلم جرّاً الى الاربعة والستين بيتاً
فكم حبة اخذ



الفصل السادس عشر

في الغير المتناهيات ونظير الغير المتناهي

٢١٧ الغير المتناهي بحسب مفهومه المطلق شيء لا يقبل زيادة ولا يتوهم له
زيادة . وهذا هو المراد به في الادبيات والالهيات . واما في العدد فلا يمكن تصوره
اذ يمكن ان يزداد عدد حتى يتجاوز اي عدد فرض . وبحسب ذلك يكون العدد
الاعظم ما يستحيل الوصول اليه . ومما زيد عدد يمكن ان يتوهم له زيادة فيكون
المراد بالغير المتناهي في التعليميات غير المراد في غيرها كما مر

٢١٨ الكمية التعليمية اذا توهمت زيادتها فوق حدود مفروضة سميت غير
متناهية . والمراد بالحدود المفروضة ما يستطيع العقل ادراكه . وعلى هذا المعنى تكون
الاعداد الطبيعية التي هي ١ ٢ ٣ ٤ ٥ الى اخره غير متناهية لانها مهما
زيدت يمكن ان تزداد ايضاً . وبناءً على هذا يمكن ان يقال في غير متناهيه انه اعظم من
غير متناهيه اخر . مثاله ٢ ٢ ٢ ٢ ٢ الى غير نهاية و٤ ٤ ٤ ٤ ٤

الى غير نهاية. فهما زاد السردان يكون الثاني مضاعف الاول وهكنا $ت^٢ + ت^١ + ت^٠$ الخ و $ت^١ + ت^٠$ الخ و $ت^٠$ الخ. يكون الثاني تسعة امثال الاول

يجب ان نغز بين كمية غير متناهية وعدة اجزاء غير متناهية اذ قد يمكن ان تعدد الاجزاء الى غير نهاية وتكون الكمية كلها متناهية وصغيرة. مثالة اذا اخذ واحد ثم نصفه ثم رعه وهلم جرا يكون لنا $\frac{1}{3} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$ الى اخره. فهما تعددت الاجزاء لا يمكن ان تفوق الواحد. وهكذا $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$ الى اخره لا يمكن ان تفوق الثانية

٢١٩ اذا هبطت كمية تحت حد مفروض سميت نظير الغير

المتناهي ماله $\frac{1}{1.} \quad \frac{1}{1.00} \quad \frac{1}{1.000} \quad \frac{1}{1.0000}$

وعلى المعنى المذكور يمكن قسمة كمية الى غير نهاية. والكمية التي هي اصغر ما يكون لا يمكن الوصول اليها اذ لا يمكن تجزئها الى حذر لا يوم تجزئها ايضا وعلى هذا المعنى ايضا يمكن ان يكون نظير غير متناه اصغر من نظير غير متناه اخر. مثالة $\frac{7}{1.} \quad \frac{7}{1.00} \quad \frac{7}{1.000} \quad \frac{7}{1.0000}$ الى اخره و $\frac{3}{1.} \quad \frac{3}{1.00} \quad \frac{3}{1.000} \quad \frac{3}{1.0000}$ الى اخره. فيكون الثاني نصف الاول مهما تعددت الاجزاء. وهكذا

$\frac{1}{1.} \quad \frac{1}{1.00} \quad \frac{1}{1.000} \quad \frac{1}{1.0000}$ و $\frac{1}{4.} \quad \frac{1}{4.00} \quad \frac{1}{4.000} \quad \frac{1}{4.0000}$

٢٢٠ اذا حدثت في الاعمال الجبرية كمية نظير الغير المتناهي يمكن طرحها من العمل بدون ان يجعل فرقا في الحاصل اذ لا اعتبار لما هو صغير بهذا المقدار حتى لا يشعر بخضوره او غيابه. مثالة في تحويل $\frac{1}{10}$ الى كسر عشري فان قسم الصورة على المخرج يكون لنا $\frac{1}{10}$ وهي تعدل $\frac{1}{3}$ تقريبا و $\frac{22}{100}$ اكثر

تقريباً و $\frac{٢٢٢}{١٠٠٠}$ أكثر تقريباً وهلم جرا حتى يصير الفرق بين $\frac{١}{٢}$ والكسر العشري صغيراً جداً لا اعتبار له

ونرى ما سبق انه يمكن لكيفية ان تقترب الى اخرى الى غير نهاية بدون ان تبلغ اليها. مثاله في تحويل $\frac{١}{٢}$ الى كسر عشري مهما امتد في منازل الكسر العشري لا يمكن ان يبلغ الى $\frac{١}{٢}$ تماماً. ومما تعددت المنازل فلا بد ان يبقى بينها وبين $\frac{١}{٢}$ فرق ولو كان صغيراً الى غير نهاية. وفي كميات من هذا النوع سميت احدها حد الآخر. فان $\frac{١}{٢}$ هو حد $\frac{٢٢٢٢٢٢}{١٠٠٠٠٠٠}$ الى اخره و $\frac{٢}{٣}$ هو حد $\frac{٦٦٦٦٦}{١٠٠٠٠٠}$. الخ الى غير نهاية. ثم ان نظير الغير المتناهي وان لم يكن له اعتبار في ذاته ان وقع مضروباً فيه او مقسوماً عليه يكون له احياناً اعتبار كلي. واذا كان نظير الغير المتناهي لا يفرق عن صفر بما يشعر به فيدل عليه احياناً بصفر ويدل على الغير المتناهي بهذه العلامة ∞

٢٢١ لما كان الغير المتناهي اعظم من نظير الغير المتناهي بما لا يوصف كان يمكن عند ارتباطها بعلامة الجمع او الطرح اخراج نظير الغير المتناهي من العمل بالكلية. وهكذا اذا ارتبط نظير الغير المتناهي بكمية متناهية. ولكن اذا ضرب غير متناه في متناه يزداد بذلك الغير المتناهي كقيمة الكميات. مثاله $٢ \ ٢ \ ٢ \ ٢ \ ٢$ الخ \times يكون الحاصل $٨ \ ٨ \ ٨ \ ٨ \ ٨$ الخ اي اربعة امثال الاولى. واذا انقسم غير متناه على متناه ينقص الاول كقيمة الكميات مثاله $٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦ \ ٦$ الخ \div $٢ = ٣ \ ٣ \ ٣ \ ٣ \ ٣$ الخ اي نصف الاولى. وان ضربت كمية متناهية في نظير الغير المتناهي يكون الحاصل نظير الغير المتناهي. مثاله اذا فرض $ل =$ المتناهية و $\cdot =$ نظير الغير المتناهي لنا $ل \times \cdot = ٠$. لانه لو كان المضروب فيه واحداً لكان الحاصل مساوياً للمضروب. وان كان اقل من واحد يكون الحاصل اقل من المضروب. وهنا فرضنا المضروب فيه اقل من واحد الى غير نهاية فيكون الحاصل اقل من المضروب فيه الى غير نهاية. واذا انقسمت كمية متناهية على نظير الغير المتناهي يكون الخارج غير متناه اي $ل \div \cdot = \infty$ لانه كلما قل المقسوم عليه زاد

الخارج وهنا قد قلّ المقسوم عليه الى غير نهاية فزاد الخارج الى غير نهاية . ومثله
 $2 = 2 + 6$ و $20 = 2 + 6$ و $200 = 2 + 6$ و $2000 = 2 + 6$ الخ
 واذا انقسمت متناهية على غير متناهية يكون الخارج نظير الغير المتناهي ا ب
 $\frac{ل}{\infty} = 0$. لانه كلما زاد المقسوم عليه قلّ الخارج . فان زاد المقسوم عليه الى غير
 نهاية بقى الخارج الى غير نهاية



الفصل السابع عشر

في القسمة على المركب وفي العاد الأكبر

٢٢٢ اذا اردت القسمة على مقسوم عليه مركب فاقسم الجزء الاول من
 المقسوم على الاول من المقسوم عليه واضرب كل المقسوم عليه في الخارج واطرح
 الحاصل من المقسوم . ثم اترى من اجزاء المقسوم ما يقضي وهلم جرّاً الى نهاية العمل .
 وهذه صورته وامثلته

(١) اقسم ت س + ب س + ت د + ب د على ت + ب

ت + ب (ت س + ب س + ت د + ب د) (س + د)
ت س + ب س

ت د + ب د
ت د + ب د

تنبيه . قبل القسمة يجب ترتيب الاجزاء حتى يكون الحرف الاول في المقسوم
 عليه اولاً في المقسوم . وان تكون القوة العليا فيها اولاً وتكتب بقية القوات على
 رتبة قواتها

(٢) اقسم ت س + ب س + ت د + ب د على ت س + ب س + ت د + ب د فان
 اخذنا ت للجزء الاول من المقسوم عليه يجب ان نأخذ ت للاول في المقسوم ونكتب
 البقية حسب قوات ت

(٦) اقسم ث' + ت' + ث' ب + ت + ب + ٢ ت س + ٢ س على ت + ١

الخارج ث' + ت + ب + ٢ س

(٧) اقسم ت + ب - س - ت - ك - ب - ك + س ك على ت + ب - س

الخارج ١ - ك

(٨) اقسم ٢ ث' - ١٢ ت' ك + ١١ ت' ك' - ٨ ت ك' + ٢ ك' على

٢ ت' - ت ك' + ك'

٢٢٤ اذا بقيت بقية بعد انزال جميع الاجزاء تكتب فوق المقسوم عليه على صورة كسرية كما في الحساب

مثال ٩ (ت + ب) ت س + ب س + ت د + ب د + ك (س + د) + ت + ب

$$\begin{array}{r} \text{ت س + ب س} \\ \hline \text{ت د + ب د} \\ \text{ت د + ب د} \\ \hline \text{ك} \end{array}$$

مثال ١٠ (د - ح) ت د - ت ح + ب د - ب ح + ي (ت + ب) + ح - د

$$\begin{array}{r} \text{ت د - ت ح} \\ \hline \text{ب د - ب ح} \\ \text{ب د - ب ح} \\ \hline \text{ي} \end{array}$$

(١١) اقسم ٦ ت ك + ٢ ك ي - ٢ ت ب - ب ي + ٢ ت س + س ي

ح على ٢ ت + ي

الخارج ٢ ك - ب + س + ٢ ت + ح

(١٢) اقسم ث' ب - ٢ ت' + ٢ ت ب - ٦ ت - ٤ ب + ٢٢ على ب - ٢

الخارج ث' + ٢ ت - ٤ ب + ١٠

(١٤) (ت + ب) ت س + س ب + ت ب + ت د + ب د (س + د)

$$\begin{array}{r} \text{ت س + س ب} \\ \hline \text{ت ب + ت د} \\ \text{ت ب + ت د} \\ \hline \end{array}$$

(١٤) انقسم ت + م + ت ر م + ر ي على ت + م +
الخارج ا + ر م +

(١٥) انقسم ك - ٢ ت ك + ٢ ت ك - ت على ك - ت

(١٦) انقسم آ - ٢ ي - ١٩ ي + ٢٦ ي - ١٧ ي على ي - ٨

(١٧) انقسم ك - ١ - ١ على ك - ١

(١٨) انقسم ٤ ك - ٩ ك + ٦ ك - ٢ على ٢ ك + ٢ ك - ١

(١٩) انقسم ت + ٤ ت ب + ٢ ب على ت + ٢ ب

(٢٠) انقسم ك - ت ك + ٢ ت ك - ت على ك - ت ك + ت

٢٢٥ اذا انقسمت فضلة قوتين على فضلة كيتينها الاصلين يخرج من ذلك

سلسلة قوات

مثال (ي - ت) + (ي - ت) = ي + ت

(ي - ت) + (ي - ت) = ي + ت + ي + ت

(ي - ت) + (ي - ت) = ي + ت + ي + ت + ي + ت

(ي - ت) + (ي - ت) = ي + ت + ي + ت + ي + ت + ي + ت

ويبرهن ذلك بالضرب

وهكذا يبرهن ان فضلة قوات كيتين اذا كان دليلها عدد شفع يمكن قسمتها

على مجموع الكيتين

مثال (ي - ت) + (ي + ت) = ي - ت

و (ي - ت) + (ي + ت) = ي - ت + ي + ت - ي - ت

و (ي - ت) + (ي + ت) = ي - ت + ي + ت - ي - ت + ي + ت

ت - ي - ت

ومجموع قوتين من كيتين ان كان الدليل وزراً يُقسم على مجموع الكيتين

مثال (ي + ت) + (ي - ت) = ي + ت

(ي + ت) + (ي - ت) = ي + ت + ي - ت - ي - ت + ي + ت

$$(ي^٧ ت^٧) + (ي + ت) = ي^٦ - ت^٦ + ت^٥ ي - ت^٤ ي^٢ + ت^٣ ي^٣ - ت^٢ ي^٤ + ت ي^٥ - ي^٦$$

$$ت^٥ ي + ت^٦$$

في العاد الأكبر للكميتين

٢٢٦ لكي نجد العاد الأكبر انقسم احدى الكميتين على الاخرى والمقسوم عليه على الباقي ثم المقسوم عليه الثاني على الباقي الثاني وهلم جرا الى ان لا يبقى شيء فيكون المقسوم عليه الاخير العاد الأكبر. وان ارد العاد الأكبر لثلاث كميات يجب اخذ لاثنتين منها ثم العاد الأكبر بين الثالثة والعاد الأكبر الاول وهكذا مهما تعددت الكميات

٢٢٧ في اخذ العاد الأكبر لكميات مركبة يجب احيانا تنقيص المقسوم عليه او زيادة المقسوم. ويمكن ذلك بدون تغيير العاد الأكبر اذا ضرب او انقسم احدى على كمية لا ينقسم عليها الاخر وليس فيها جزء ينقسم عليه الاخر. مثالة ان العاد الأكبر بين ت ب و ت س هوت ان ضربت احداهما في د فيكون العاد الأكبر بين ت ب د و ت س هوت ايضا. وان فرض ت ب و ت س د يكون العاد الأكبر بينهما ت ايضا. واذا انقسم ت س د على د يبقى ت س فيكون ت العاد الأكبر بينهما كما كان. وبموجب ذلك يمكن تسهيل العمل في اخذ العاد الأكبر بقسمة المقسوم عليه على كمية ليست بمقسوم عليه المقسوم او ضرب المقسوم في كمية لا تعدد المقسوم عليه

مثال اول ما هو العاد الأكبر بين ٦ ت + ١١ ك + ٢ ت + ٦ ت + ٧ ت ك - ٣ ك
وهذه صورة العمل

$$٦ ت + ٧ ت ك - ٣ ك - ٦ ت + ١١ ك + ٢ ت + ١ ك$$

$$\frac{٦ ت + ٧ ت ك - ٣ ك - ٦ ت + ١١ ك + ٢ ت + ١ ك}{٦ ت + ١ ك - ٣ ك}$$

$$٦ ت + ١ ك - ٣ ك - ٦ ت + ١١ ك + ٢ ت + ١ ك$$

$$\frac{٦ ت + ١ ك - ٣ ك - ٦ ت + ١١ ك + ٢ ت + ١ ك}{٦ ت + ١ ك - ٣ ك}$$

$$\frac{٦ ت + ١ ك - ٣ ك - ٦ ت + ١١ ك + ٢ ت + ١ ك}{٦ ت + ١ ك - ٣ ك}$$

فالعاد الأكبر بين الكميتين ٢ ت + ٣ ك

- ٣ ما هو العاذاً الأكبرين ك^٢ - ب^١ ك^١ وك^٢ + ٢ ب^١ ك^١ + ب^١
 الجواب ك + ب
- ٤ ما هو العاذاً الأكبرين س^١ ك^١ + ك^١ وت^١ س^١ + ت^١ ك^١ الجواب س + ك
- ٥ ما هو العاذاً الأكبرين ٢ ك^١ - ٢٤ ك^١ - ٩ و ٢ ك^١ - ١٦ ك^١ - ٦
 الجواب ك^١ - ٨ ك^١ - ٣
- ٥ ما هو العاذاً الأكبرين ت^١ - ب^١ وت^١ - ب^١ ت^١ الجواب ت^١ - ب^١
- ٦ ما هو العاذاً الأكبرين ك^١ - ت^١ وك^١ - ت^١ وك^١ - ت^١
- ٧ ما هو العاذاً الأكبرين ك^١ - ١ وك^١ + ١ الجواب ك + ١
- ٨ ما هو العاذاً الأكبرين ت^١ - ت^١ ب^١ - ٢ ب^١ وت^١ - ٢ ت^١ ب^١ + ٢ ب^١
- ٩ ما هو العاذاً الأكبرين ت^١ - ك^١ وت^١ - ت^١ ك^١ - ت^١ ك^١ + ك^١
- ١٠ ما هو العاذاً الأكبرين ت^١ - ت^١ ب^١ وت^١ + ٢ ت^١ ب^١ + ب^١



الفصل الثامن عشر

في ترقية الكميات الثنائية وسطها

٢٢٨ قد رأينا سابقاً كيفية ترقية الكميات بالضرب غير أنها إذا كانت القوة مطلوبة عالية بطول بها العمل جداً، وقد اخترع الفيلسوف اسحق نيوتون قاعدة مختصرة لترقية الكميات الثنائية ولشد اعتبارها عند علماء هذا الفن كتبوها على قبة في كنيسة وستمنستر في لندن

٢٢٩ إذا ضربت كمية مثل ت + ب فلنا هذه القوات

$$(ت + ب)^1 = ت^1 + ٢ ت^١ ب^١ + ب^٢$$

$$(ت + ب)^2 = ت^2 + ٢ ت^١ ب^١ + ٢ ت^١ ب^١ + ب^2$$

$$(ت + ب)^4 = ت^4 + ٤ ت^٣ ب^١ + ٦ ت^٢ ب^٢ + ٤ ت^١ ب^٣ + ب^4$$

$$(ت + ب) = ٥ + ت + ١٠ + ت + ب + ١٠ + ت + ب + ٥ + ت + ب$$

فنى من ذلك ان الدلائل جارية على اسلوب واحد ابداً. اي ان دليل ت في الجزء الاول ودليل ب في الجزء الاخير يعدل دليل اسم القوة المفروضة. وان دلائل ت تهبط بواحد في كل حزه. وان دلائل ب تعلو بواحد في كل حزه بعد الاول

واذا قطعنا النظر عن المسميات نرى ما سبق ان دلائل اية قوة فرضت من كمية ثنائية تعدل اسم القوة المفروضة في الجزء الاول والاخير وان دلائل الاصلية تهبط ودلائل التابعة تعلو واحداً في كل حزه

تنبيه. يراد بالاصلية الجزء الاول من الكمية الثنائية والتابعة الجزء الثاني. مثاله في ت + ب سميت ت الاصلية وب التابعة

$$ثم ان قيل ما هي القوة الثامنة من ت + ب بنقطع النظر عن المسميات فالجواب$$

$$١ + ت + ٢ + ب + ٣ + ت + ٤ + ب + ٥ + ت + ٦ + ب + ٧ + ت + ٨ + ب + ٩ + ت + ١٠ + ب + ١١ + ت + ١٢ + ب + ١٣ + ت + ١٤ + ب + ١٥ + ت + ١٦ + ب + ١٧ + ت + ١٨ + ب + ١٩ + ت + ٢٠ + ب + ٢١ + ت + ٢٢ + ب + ٢٣ + ت + ٢٤ + ب + ٢٥ + ت + ٢٦ + ب + ٢٧ + ت + ٢٨ + ب + ٢٩ + ت + ٣٠ + ب$$

ثم نرى عدد الاجزاء اكثر من الاحاد في اسم القوة بواحد ابداً. فاذا نرى في المربع ثلثة اجزاء وفي المكعب اربعة وفي القوة الرابعة خمسة وفي الخامسة ستة وهلم جرا ٢٣٠ ثم لكي نجد المسميات اذا نظرنا الى القوات المتقدمة (٢٢٩) نرى

$$١ \quad ٢ \quad ٣ \quad ٤ \quad ٥ \quad ٦ \quad ٧ \quad ٨ \quad ٩ \quad ١٠ \quad ١١ \quad ١٢ \quad ١٣ \quad ١٤ \quad ١٥ \quad ١٦ \quad ١٧ \quad ١٨ \quad ١٩ \quad ٢٠$$

$$٢١ \quad ٢٢ \quad ٢٣ \quad ٢٤ \quad ٢٥ \quad ٢٦ \quad ٢٧ \quad ٢٨ \quad ٢٩ \quad ٣٠$$

$$٣١ \quad ٣٢ \quad ٣٣ \quad ٣٤ \quad ٣٥ \quad ٣٦ \quad ٣٧ \quad ٣٨ \quad ٣٩ \quad ٤٠$$

$$٤١ \quad ٤٢ \quad ٤٣ \quad ٤٤ \quad ٤٥ \quad ٤٦ \quad ٤٧ \quad ٤٨ \quad ٤٩ \quad ٥٠$$

فنى ان مسمى الجزء الاول هو واحد ابداً. وان مسمى الجزء الثاني يعدل دليل القوة المفروضة. ومن ثم اذا ضرب مسمى جزء في دليل الكمية الاصلية وانقسم المحاصل على دليل التابعة + ١ يكون من ذلك مسمى الجزء الذي يتلوه

واذا نظرنا الى المسميات المذكورة آنفاً نرى انها اولاً تزيد الى حد معلوم ثم تهبط

مثلاً زادت فتكون متساوية في الجزء الاول والاخير وفي الثاني والذي قبل الاخير وفي الثالث والذي قبل ما قبل الاخير. فاذا عرفنا مسميات نصف الاجزاء نعرف منها مسميات البقية

وفي اية قوة فرضت من كمية ثنائية مثل ت + ب يعدل مجموع المسميات تلك القوة من اثنين كما نرى قبيل هذا

٢٢١ ان الفضاءا الماضي ذكرها قد انحصرت في نظرية واحدة تسمى النظرية الثنائية. وهي

انه في كل قوة من كمية ثنائية يكون دليل الاصلية مساوياً لاسم القوة. ومن ثم يهبط بواحد في كل جزء. ودليل التابعة يبتدي بواحد في الجزء الثاني. ومن ثم يعلو بواحد في كل جزء

مسمى الجزء الاول واحد ومسمى الجزء الثاني يعدل دليل القوة المفروضة. ومن ثم اذا ضرب مسمى جزء في دليل الاصلية وانقسم على دليل التابعة + ا يكون من ذلك مسمى الجزء التالي له

وتكتب هذه النظرية في عبارة جبرية هكذا (ت + ب)^ن = ت^ن + ن × ت^{ن-١} × ب + ن × ب^١ × ت^{ن-١} + ب^ن الى اخره

مثال اول ما هي القوة السادسة من ك + ي
الجواب ك^٦ + ٦ ك^٥ ي + ١٥ ك^٤ ي^٢ + ٢٠ ك^٣ ي^٣ + ١٥ ك^٢ ي^٤ + ٦ ك^١ ي^٥ + ي^٦

٢ (د + ح) = د^٥ + ٥ د^٤ ح + ١٠ د^٣ ح^٢ + ١٠ د^٢ ح^٣ + ٥ د^١ ح^٤ + ح^٥
٣ ما هي القوة الخامسة من ك + ي

بوضع ت عوض ك ووضع ب عوض ي لنا
(ت + ب)^٥ = ت^٥ + ٥ ت^٤ ب + ١٠ ت^٣ ب^٢ + ١٠ ت^٢ ب^٣ + ٥ ت^١ ب^٤ + ب^٥

+ ب

ثم يترجع ك^٢ و^٣ ع^٢ عوض ت وب لنا
 ك^١ + ١٥ ك^١ + ٩٠ ك^١ + ٢٧٠ ك^١ + ٤٠٥ ك^١ + ٢٤٣ ك^١
 ع^٢ ماهي القوة السادسة من ٢ ك + ٢ ي
 الجواب ٧٢٩ ك^١ + ٢٩١٦ ك^١ + ٤٨٦٠ ك^١ + ٤٣٢٠ ك^١
 ٢١٦٠ ك^١ + ٥٧٦ ك^١ + ٦٤ ك^١

٢٢٢ الكمية الفضلية ترقى كالاجابية غير ان علاماتها تتغير فان (ت - ب)
 = ت - ٢ ت ب + ب

و(ت - ب) = ت - ٢ ت ب + ٢ ت ب - ب
 و(ت - ب) = ت - ٤ ت ب + ٦ ت ب - ٤ ت ب + ب الخ
 فزى ان كل جزء يقع فيه قوة وترية من الكمية التابعة تكون علامته سليمة
 القوة السادسة من ك - ي = ك^١ - ٦ ك^١ + ١٥ ك^١ - ٢٠ ك^١
 + ١٥ ك^١ - ٦ ك^١ + ١٥ ك^١

٢٢٣ متى كان احد جزئي كمية ثنائية واحداً يمكن تركه الا من الجزء الاول
 او الاخير لان كل قوفه من واحد واحد وضرب كمية في واحد لا يغيرها شيئاً. مثاله
 (ك + ١) = ك^٢ + ٢ ك^١ + ١ ك^١ + ١ ك^١ + ١
 وذلك = ك^٢ + ٢ ك^١ + ٢ ك^١ + ١

فلا داعي الى كتابة الواحد الاحفظ الدليل لاجل معرفة المسميات. وليس لها
 لزوم ايضاً من هذا القيل لاننا نعرف الدلائل من كون مجموع الدليلين في كل جزء
 يعدل اسم القوة المفروضة

مثاله (١ - ي) = ١ - ٦ ي + ١٥ ي - ٢٠ ي + ١٥ ي - ٦ ي + ١ ي
 اننا نرى ما سقى ان العبارة الدالة على قوة الجزء الاول من جذرها واحد هي
 بسيطة جداً. فاما تحولت ثنائية ما الى اخرى الجزء الاول منها واحد يمكن الدلالة
 على كل قوفه منها بالعبارة المذكورة. مثاله ت + ك + ت = (١ + $\frac{ك}{ت}$) اوت +
 ك = ت (١ + $\frac{ك}{ت}$) فاذا

(ت + ك) = ت^٢ × (١ + $\frac{ك}{ت}$) وبالبسط تصير

ت^٢ × (١ + $\frac{ك}{ت}$ + $\frac{ك}{ت}$ + $\frac{ك}{ت}$) وقس على ذلك

٢٢٤ متى كان دليل قوة مفروضة من ثنائية صحيحاً ايجابياً تنتهي السلسلة حسباً تقدم. ومتى كان دليل القوة المفروضة سلبية لا تنتهي السلسلة بل يمكن الامتداد فيها الى غير نهاية ككثير من الكسور العشرية. مثاله لو قيل ابط
 $\frac{١}{(ت + ي)}$ او (ت + ي) - لقليل ت^٢ - ٢ ت^٢ - ٢ ي^٢ + ٢ ت^٢ - ي^٢ -
 ٤ ت^٢ - ي^٢ + ٥ ت^٢ - ي^٢ الخ

فترى هنا المسميات تعلو في كل جزء بواحد والعلامات ايجابية وسلبية بالتداول
 ٢٢٥ ثم ان النظرية الثنائية تفيد جداً في تجذير الثنائيات لانها تدل على
 الجذر كما تدل على القوة غير ان دليل القوة صحيح ودليل الجذر كسر مثاله (ت + ب)^٢
 فان كانت ن عوضاً عن ٢ مثلاً تكون العبارة دالة على قوة وان كانت عوضاً عن
 $\frac{١}{٢}$ مثلاً تكون جذراً

اذا انبسط جذر بواسطة النظرية الثنائية فالسلسلة لا تنتهي لان السلسلة انما
 تنتهي عند ما يصير دليل الاصلية صفراً حتي تقضي المسميات. والكسر لا يمكن ان
 ينتهي الى صفر بطرح واحد منه على التوالي. فان كان الدليل في الجزء الاول $\frac{١}{٢}$
 يكون في الثاني $\frac{١}{٢} - ١ = -\frac{١}{٢}$ وفي الثالث $-\frac{١}{٢} - ١ = -\frac{٣}{٢}$ وفي
 الرابع $-\frac{٣}{٢} - ١ = -\frac{٥}{٢}$ مثاله لو قيل ما هو الجذر المالمالي من ت
 + ب اي (ت + ب) لقليل ت^٢ + $\frac{١}{٢}$ ت^٢ - $\frac{١}{٨}$ ب - $\frac{١}{٨}$ ت^٢ - $\frac{١}{٨}$ ب +
 $\frac{١}{١٦}$ ت^٢ - $\frac{١}{١٦}$ ب الخ

مثال اول ابط (ت + ك) بوضع ب عوض ت تصير (ب + ك) ب
 وبسطها = ب^٢ + $\frac{١}{٢}$ ب - $\frac{١}{٨}$ ك - $\frac{١}{٨}$ ب - $\frac{١}{٨}$ ك + $\frac{١}{٤٨}$ ب - $\frac{١}{٤٨}$ ك

$$- \frac{10}{248} \text{ ب} - \frac{1}{2} \text{ ك الى اخره}$$

$$\text{وذاك} = \text{ب} \frac{1}{2} + \frac{\text{ك}}{2 \text{ ب}} - \frac{\text{ك}}{8 \text{ ب}} - \frac{10}{248} \frac{\text{ك}}{\text{ب}} \text{ الخ}$$

ثم بترجيح ت عوض ب نصير

$$\text{ت} + \frac{\text{ك}}{2 \text{ ت}} - \frac{\text{ك}}{8 \text{ ت}} + \frac{2}{48} \frac{\text{ك}}{\text{ت}} - \frac{10}{248} \frac{\text{ك}}{\text{ت}} \text{ الخ}$$

$$\bar{\text{ا}} \text{ بسط } (1 + \text{ك})$$

$$\text{الجواب ا} + \frac{\text{ك}}{2} - \frac{\text{ك}}{8} + \frac{2}{48} \frac{\text{ك}}{\text{ت}} - \frac{10}{248} \frac{\text{ك}}{\text{ت}} \text{ الخ}$$

$$\bar{\text{ا}} \text{ بسط } \text{ا} (1 + 1)$$

$$\text{الجواب ا} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{2}{48} - \frac{10}{248} \text{ الخ}$$

$$\bar{\text{ا}} \text{ بسط } (\text{ت} + \text{ك}) \frac{1}{2} \text{ اوت } \frac{1}{2} \times (1 + \frac{\text{ك}}{\text{ت}})$$

$$\text{الجواب ت} \times (1 + \frac{\text{ك}}{2 \text{ ت}} - \frac{\text{ك}}{8 \text{ ت}} + \frac{2}{48} \frac{\text{ك}}{\text{ت}} - \frac{10}{248} \frac{\text{ك}}{\text{ت}}) \text{ الخ}$$

$$\bar{\text{ا}} \text{ بسط } (\text{ت} + \text{ب}) \frac{1}{2} \text{ اوت } \frac{1}{2} \times (1 + \frac{\text{ب}}{\text{ت}})$$

$$\text{الجواب ت} \times (1 + \frac{\text{ب}}{2 \text{ ت}} - \frac{\text{ب}}{18 \text{ ت}} + \frac{10}{162} \frac{\text{ب}}{\text{ت}} - \frac{80}{1944} \frac{\text{ب}}{\text{ت}}) \text{ الخ}$$

$$\bar{\text{ا}} \text{ بسط } (\text{ت} - \text{ب}) \frac{1}{2}$$

$$\text{الجواب ت} \times (1 - \frac{\text{ب}}{2 \text{ ت}} + \frac{2}{22 \text{ ت}} - \frac{21}{248} \frac{\text{ب}}{\text{ت}} + \frac{221}{6144} \frac{\text{ب}}{\text{ت}}) \text{ الخ}$$

$$\bar{\text{ا}} \text{ بسط } (\text{ت} + \text{ك}) - \frac{1}{2} \bar{\text{ا}} \text{ بسط } (1 - \text{ك})$$

$$\bar{\text{ا}} \text{ بسط } (1 + \text{ك}) - \frac{1}{2} \bar{\text{ا}} \text{ بسط } (\text{ت} + \text{ك}) - \frac{1}{2}$$

٢٢٦ ثم ان النظرية الثانية تستعمل في كميات لها اكثر من جزوين بالتعويض عن الاجزاء حتى نغول الى جزوين. ثم عند ترجيع المعوض عنها تبسط التي كان لها دلائل بمفردها. مثالة ما هو كعب ت + ب + س عوض عن ب + س واجعل ح = ب + س فتكون العبارة ت + ح و (ت + ح) = ت + ت + ح + ت + ح

+ ح^٢ ثم بترجع قيمة ح لنا (ت + ب + س) = ت^٢ + ت^٢ × (ب + س) +
 ت^٢ × (ب + س) + (ب + س)^٢ ثم ترفي ب + س حسبما تقدم

امثلة

١ ما هي القوة الثامنة من (ت + ب)

الجواب ت^٨ + ٨ ت^٧ ب + ٢٨ ت^٦ ب^٢ + ٥٦ ت^٥ ب^٣ + ٧٠ ت^٤ ب^٤ +
 ٥٦ ت^٣ ب^٥ + ٢٨ ت^٢ ب^٦ + ٨ ت^١ ب^٧ + ب^٨

٢ ما هي القوة السابعة من ت - ب

٣ ابسط $\frac{1}{1-t}$ او (١ - ت)^{-١}

الجواب ١ + ت + ت^٢ + ت^٣ + ت^٤ + ت^٥ + ت^٦ + ت^٧ + ...

٤ ابسط $\frac{t}{1-t}$ او ح × (ت - ب)^{-١}

الجواب ح × ($\frac{1}{1-t} + \frac{t}{1-t} + \frac{t^2}{1-t} + \frac{t^3}{1-t} + \dots$)

او ($\frac{t}{1-t} + \frac{t^2}{1-t} + \frac{t^3}{1-t} + \frac{t^4}{1-t} + \dots$)

٥ ابسط (ت + ب)^{١/٢}

الجواب ت + $\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{8} + \frac{t^4}{16} + \dots$

٦ ابسط (ت + ي)^{-٤}

الجواب $\frac{1}{1-t-y} - \frac{t}{1-t-y} + \frac{t^2}{1-t-y} - \frac{t^3}{1-t-y} + \dots$

٧ ابسط (س + ك)^{١/٢}

الجواب س × ($1 + \frac{K}{S} + \frac{K^2}{S^2} - \frac{K^3}{S^3} + \dots$)

٨ ابسط $\frac{d}{ms + K}$ او د × (س + ك)^{-١}

الجواب $\frac{d}{ms} \times (1 - \frac{K}{ms} + \frac{K^2}{m^2s^2} - \frac{K^3}{m^3s^3} + \dots)$

الخ $\frac{3 \times 5 \times 7 \times K}{1 \times 8 \times 6 \times 4 \times S^4}$

٩ ما هي القوة الخامسة من (ت + ي)

١٠ ما هي القوة الرابعة من ت + ب + ك

١١ ابط (ت - ك) $\frac{1}{4}$

١٢ ابط (١ - ي) $\frac{1}{4}$

١٣ ابط (ت - ك) $\frac{1}{4}$

١٤ ابط ح (ت - ي) $\frac{1}{4}$

الفصل التاسع عشر

في تجذير الكميات المركبة

٢٢٧ قاعدة. رتب الكميات على موجب قوات احد حروفها حتى تكون العليا اولاً. وهكذا على التوالي. ثم تاخذ جذر الجزء الاول فيكون لك الجزء الاول من الجذر المطلوب. وترقي ذلك الجزء الى قوة من اسم دليل الجذر المطلوب وتطرحه من الكمية نفسها ثم تنزل الجزء الثاني وتقسّمه على الجذر الذي اخذته بعد ترفيقته الى قوة دليلها اقل من دليل الجذر المطلوب بواحد وضربه في دليل الجذر المطلوب فيكون الخارج الجزء الثاني من الجذر. ثم ترفقي الجزءين من الجذر الى قوة من اسم دليل الجذر المطلوب وتطرحها من الباقي وتقسّم كما تقدم وهذه صورة العمل

ما هو الجذر الكمي من

$$٨ - (ت + ت - ٢) + ١٢ - ١١ ت + ٦ ت + ٢ ت + ١٢ - ٨ ت$$

$$\frac{٨ - ١٢ + ٦ ت + ٢ ت + ١٢ - ٨ ت}{٢ ت + ٢ ت + ٢ ت + ٢ ت} = ٢ ت - ٢ ت - ٢ ت - ٢ ت$$

$$\frac{٨ - ١٢ + ٦ ت + ٢ ت + ١٢ - ٨ ت}{٢ ت - ٢ ت - ٢ ت - ٢ ت} = ٨ - ١٢ + ٦ ت - ٢ ت - ١١ ت + ١٢ - ٨ ت$$

لا يحتاج الى اترال اكثر من جزء واحد من الجذر لان القسمة تجري على جزء واحد منه فقط

٢ ما هو الجذر الرابع من

$$\begin{array}{r} ٤ + ٨ + ٢٤ + ٢٢ + ١٦ + (٢ + ٢) \\ \hline ٤٤ + ٨ + ٢٤ + ٢٢ + ١٦ + ٢ \end{array}$$

٣ ما هو الجذر الخامس من $٤ + ٨ + ٢٤ + ٢٢ + ١٦ + (٢ + ٢)$ الجواب ت + ب

٤ ما هو الجذر الكهبي من $٤ + ٨ + ٢٤ + ٢٢ + ١٦ + (٢ + ٢)$ الجواب ت - ب

٥ ما هو الجذر المالي من

$$\begin{array}{r} ٤٤ + ٨ + ٢٤ + ٢٢ + ١٦ + (٢ + ٢) \\ \hline ٤٤ + ٨ + ٢٤ + ٢٢ + ١٦ + ٢ \end{array}$$

هنا كانت القوة التي هي اقل بواحد من اسم الجذر القوة الاولى فلم ترتق ت قبل القسمة عليها

٢٢٨ الجذر المالي يوخذ غالباً على موجب قاعة كفاعنة علم الحساب لذلك وهي ان ترتب الكمية حسب قوات احد احرفها. ثم تاخذ جذر الجزء الاول للجزء الاول من الجذر المطلوب وتطرح قوته من الكمية نفسها. ثم تنزل جزءين اخرين ونقسم على مضاعف الجذر الموجود ونضيف الخارج الى الجذر والى المقسوم عليه. ثم نضرب المقسوم عليه في الجزء الاخير من الجذر الموجود وتطرح الحاصل من المقسوم ثم تنزل جزءين اخرين وتكرر العمل الى هذا الاسلوب الى نهايته مثال اول ما هو الجذر المالي من

٦ ما هو الجذر السادس من ت - ٦ ت ب + ١٥ ت ب - ٢٠ ت
ب + ١٥ ت ب - ٦ ت ب + ب

في جذور كميات ثنائية صماء

٢٢٩ نلزم احيانا الدلالة على الجذر المالي من كمية على صورة ت + ب
التي نسمي ثنائية او فضلية صماء بواسطة مجموع اخرين صاوين او فضلتهما ونستدل
على عبارة جبرية هذه الدلالة من هذه الفضاءات الثلاث
الاولى ان جذر صحيح لا يمكن ان يتركب من جزوين احدهما منطوق والاخر اصم
فان كان ممكنا فلنفرض

$$مت = ك + م ي \quad \text{فتربيع الجانبيين نصير}$$

$$ت = ك + ٢ ك م ي + م ي$$

$$\text{وبالتحويل } م ي = \frac{ت - ك - م ي}{٢ ك} \text{ وهي منطقة وذاك خلاف}$$

المفروض

الثانية انه في كل معادلة على صورة ك + م ي = ت + م ب تكون الاجزاء
المنطقة على الجانبيين متساوية والصماء كذلك فان لم تكن ك = ت لنفرض ك
ت + ل

ثم بالتعويض ت + ل + م ي = ت + م ب وبالمقابلة م ب = ل + م ي
اي يكون م ب مركبا من جزوين احدهما منطوق والاخر اصم وقد تبين ان ذلك
لا يمكن وهكذا يبرهن انه في المعادلة ك - م ي = ت - م ب تكون الاجزاء المنطقة
على الجانبيين متساوية والصماء كذلك

$$\text{الثالثة اذا فرض } ت + م ب = ك + م ي \text{ يكون } ت - م ب = ك - م ي$$

لانه بتربيع الاولى نصير ت + م ب = ك + ٢ ك م ي + م ي
ت = ك + م ي

$$\text{و } م ب = ٢ ك م ي$$

$$\text{بالطرح } ت - م ب = ك - ٢ ك م ي + م ي$$

$$\text{بالتجذير } ت - م ب = ك - م ي$$

٢٤٠. ثم لننظر الى كيفية استخراج عبارة دالة على جذرية ثنائية او فضلية

صفاً ما سبق

$$\text{ولفرض } \sqrt{ا + ب} = \sqrt{ك + هـ}$$

$$\text{اذا } \sqrt{ا - ب} = \sqrt{ك - هـ}$$

بتربيع الجانبين فيها لنا $\sqrt{ا + ب} = \sqrt{ك + هـ}$ و $\sqrt{ا - ب} = \sqrt{ك - هـ}$

و بتجميعها والنسبة على ٢ $\sqrt{ا + ب} = \sqrt{ك + هـ}$ و $\sqrt{ا - ب} = \sqrt{ك - هـ}$

بضرب الاولين $\sqrt{ا + ب} = \sqrt{ك + هـ}$ و $\sqrt{ا - ب} = \sqrt{ك - هـ}$

بجمع هاتين $\sqrt{ا + ب} = \sqrt{ك + هـ}$ و $\sqrt{ا - ب} = \sqrt{ك - هـ}$

و $\sqrt{ا + ب} = \sqrt{ك + هـ}$ و $\sqrt{ا - ب} = \sqrt{ك - هـ}$

$$\sqrt{ا + ب} = \sqrt{ك + هـ} \quad \text{و} \quad \sqrt{ا - ب} = \sqrt{ك - هـ}$$

ب طرحها $\sqrt{ا + ب} = \sqrt{ك + هـ}$ و $\sqrt{ا - ب} = \sqrt{ك - هـ}$

$$\sqrt{ا + ب} = \sqrt{ك + هـ} \quad \text{و} \quad \sqrt{ا - ب} = \sqrt{ك - هـ}$$

وقد فرض ان $\sqrt{ا + ب} = \sqrt{ك + هـ}$ و $\sqrt{ا - ب} = \sqrt{ك - هـ}$

$$\sqrt{ا + ب} = \sqrt{ك + هـ} \quad \text{و} \quad \sqrt{ا - ب} = \sqrt{ك - هـ}$$

$$\sqrt{ا + ب} = \sqrt{ك + هـ} \quad \text{و} \quad \sqrt{ا - ب} = \sqrt{ك - هـ}$$

$$\sqrt{ا + ب} = \sqrt{ك + هـ} \quad \text{و} \quad \sqrt{ا - ب} = \sqrt{ك - هـ}$$

ثم بوضع د عوض $\sqrt{ا + ب} = \sqrt{ك + هـ}$ و $\sqrt{ا - ب} = \sqrt{ك - هـ}$

$$(١) \quad \sqrt{ا + ب} = \sqrt{ك + هـ} \quad \text{و} \quad \sqrt{ا - ب} = \sqrt{ك - هـ}$$

$$(٢) \quad \sqrt{ا-ب} - \sqrt{ب} = \sqrt{ا-ب} - \sqrt{ب} = \sqrt{ا-ب} - \sqrt{ب}$$

مثال اول ما هو الجذر المالمالي من $\sqrt{٢+٢} + \sqrt{٢}$

$$\text{هنا } ٢ = ا \quad ٢ = ب \quad ٩ = ا-ب \quad \sqrt{٢+٢} = \sqrt{ب} \quad ٨ = ا-ب \quad ١ = ب-٩$$

$$١ = ٨$$

$$اذا \quad ١ + \sqrt{٢} = \frac{١-٢}{٢} + \frac{١+٢}{٢} = \frac{\sqrt{٢+٢}}{٢}$$

الجواب $\sqrt{٢} + ٢$

٢ ما هو الجذر المالمالي من $\sqrt{١١+٦} + \sqrt{٦}$

الجواب $\sqrt{٥} - ١$

٣ ما هو الجذر المالمالي من $\sqrt{٦-٥} + \sqrt{٥}$

الجواب $\sqrt{٢} + ٢$

٤ ما هو الجذر المالمالي من $\sqrt{٧+٤} + \sqrt{٤}$

الجواب $\sqrt{٥} - \sqrt{٢}$

٥ ما هو الجذر المالمالي من $\sqrt{٧-٢} + \sqrt{٢}$



الفصل العشرون

في السرد الغير المتناهي

٢٤١ انه في تجذير كمية او في قسمة كمية على اخرى يحدث احيانا اننا لانستطيع

الوصول الى الجذرا او الى الخارج بالتام ولكن نغث في العمل الى غير نهاية والحادث من ذلك يسمى سردا غير متناه

٢٤٢ الكسر بسيط احيانا كثيرة الى سرد غير متناه بقسمة الصورة على المخرج.

لان قيمة الكسر هي الخارج من تلك القسمة. وان لم يوجد المخرج في الصورة مرارا معلومة يبقى بهد كل قسمة باقي فيمتد في العمل الى غير نهاية مثالة لو قيل ابسط

$$\frac{١}{١-ا}$$

$$(١ + ا + ا^٢ + ا^٣ + ا^٤ + ا^٥ + ا^٦ + ا^٧ + ا^٨ + ا^٩ + ا^{١٠} + ا^{١١} + ا^{١٢} + ا^{١٣} + ا^{١٤} + ا^{١٥} + ا^{١٦} + ا^{١٧} + ا^{١٨} + ا^{١٩} + ا^{٢٠} + ا^{٢١} + ا^{٢٢} + ا^{٢٣} + ا^{٢٤} + ا^{٢٥} + ا^{٢٦} + ا^{٢٧} + ا^{٢٨} + ا^{٢٩} + ا^{٣٠} + ا^{٣١} + ا^{٣٢} + ا^{٣٣} + ا^{٣٤} + ا^{٣٥} + ا^{٣٦} + ا^{٣٧} + ا^{٣٨} + ا^{٣٩} + ا^{٤٠} + ا^{٤١} + ا^{٤٢} + ا^{٤٣} + ا^{٤٤} + ا^{٤٥} + ا^{٤٦} + ا^{٤٧} + ا^{٤٨} + ا^{٤٩} + ا^{٥٠} + ا^{٥١} + ا^{٥٢} + ا^{٥٣} + ا^{٥٤} + ا^{٥٥} + ا^{٥٦} + ا^{٥٧} + ا^{٥٨} + ا^{٥٩} + ا^{٦٠} + ا^{٦١} + ا^{٦٢} + ا^{٦٣} + ا^{٦٤} + ا^{٦٥} + ا^{٦٦} + ا^{٦٧} + ا^{٦٨} + ا^{٦٩} + ا^{٧٠} + ا^{٧١} + ا^{٧٢} + ا^{٧٣} + ا^{٧٤} + ا^{٧٥} + ا^{٧٦} + ا^{٧٧} + ا^{٧٨} + ا^{٧٩} + ا^{٨٠} + ا^{٨١} + ا^{٨٢} + ا^{٨٣} + ا^{٨٤} + ا^{٨٥} + ا^{٨٦} + ا^{٨٧} + ا^{٨٨} + ا^{٨٩} + ا^{٩٠} + ا^{٩١} + ا^{٩٢} + ا^{٩٣} + ا^{٩٤} + ا^{٩٥} + ا^{٩٦} + ا^{٩٧} + ا^{٩٨} + ا^{٩٩} + ا^{١٠٠})$$

$$\frac{١-ا}{١+ا}$$

$$\frac{١-ا}{١+ا}$$

$$\frac{١-ا}{١+ا}$$

$$\frac{١-ا}{١+ا}$$

$$\frac{١-ا}{١+ا}$$

$$\frac{١-ا}{١+ا}$$

$$\frac{١-ا}{١+ا}$$

(٤) ايسط $\frac{1}{1-t}$ الى سردي غير متناهٍ

$$1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7 + t^8 + t^9 + \dots$$

٢٤٣ تحول كمية الى سردي غير متناهٍ بتجديدها حسباً تقدم في الفصل التاسع

عشر

مثال آ ايسط $\frac{1}{1-t}$ باستخراج الجذر المائي

$$1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7 + t^8 + t^9 + \dots$$

$$1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7 + t^8 + t^9 + \dots$$

$$1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7 + t^8 + t^9 + \dots$$

$$1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7 + t^8 + t^9 + \dots$$

$$1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7 + t^8 + t^9 + \dots$$

$$1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7 + t^8 + t^9 + \dots$$

$$1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7 + t^8 + t^9 + \dots$$

$$1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7 + t^8 + t^9 + \dots$$

$$1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7 + t^8 + t^9 + \dots$$

$$1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7 + t^8 + t^9 + \dots$$

كل كمية ثنائية لها دليل سلمي او كسري تبسط الى سردي غير متناهٍ حسب النظرية الثنائية. انظر الامثلة في آخر الفصل الثامن عشر

في المسميات الغير المتعينة

٢٤٤ لنا واسطة اخرى لبسط عبارة جبرية وهي ان يؤخذ سردي له مسميات

غير معينة ثم نتعلم قيمتها فلنفرض ان عبارة جبرية ما تعدل هذا السرد

$1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7 + t^8 + t^9 + \dots$

الاول بصير الجانب الثاني صفراً والامر واضح ان المعادلة تكون حينئذ صحيحة لان

السرد = العبارة فاذا السرد = العبارة = ٠

$$\bar{س} = \frac{ح}{د} - \frac{س}{د} \quad \bar{د} = \frac{ح}{د} - \frac{س}{د}$$

وبالتعويض عن المسميات لنا

$$\frac{ت + ب ك}{د + ح ك + س ك} = \frac{ت}{د} - \frac{ح}{د} - \frac{س}{د} = \frac{ت}{د} - \left(\frac{ح}{د} + \frac{س}{د} \right) = \frac{ت}{د} - \frac{ك}{د} = \frac{ت - ك}{د}$$

$$\bar{٢} \text{ أبسط } \frac{٢ + ١}{١ - ك - ك}$$

الجواب ١ + ك + ٢ + ك + ٤ + ك + ٧ + ك + ١١ + ك + ١٨ + ك + ٢٩ + ك الخ
الذي فيه نرى مسمى ك = مجموع مسمي الجزئين السابقين

$$\bar{٤} \text{ أبسط } \frac{د}{ب - ت ك}$$

$$\text{الجواب } \bar{٥} \text{ أبسط } \frac{٥}{١ - ك - ك - ك - ك - ك} = \frac{٥}{١ - ٥ ك}$$

$$\text{الجواب } ١ + ك + ٥ + ك + ١٣ + ك + ٤١ + ك + ١٢١ + ك + ٣٦٥ + ك الخ$$

$$\bar{٦} \text{ أبسط } \frac{١}{١ - ك - ك - ك - ك - ك - ك}$$

$$\text{الجواب } ١ + ك + ٢ + ك + ٢ + ك + ٢ + ك + ٣ + ك + ٤ + ك + ٤ + ك + ٦ + ك الخ$$

$$\bar{٧} \text{ أبسط } \frac{٧}{١ - ك - ك - ك - ك - ك - ك - ك} = \frac{٧}{١ - ٧ ك}$$

$$\bar{٩} \text{ أبسط } \frac{٩}{١ - ك - ك - ك - ك - ك - ك - ك - ك} = \frac{٩}{١ - ٩ ك}$$

نبذة

في جمع الاسرار

٢٤٥ يراد بمجموع السرد كمية يكون الفرق بينها وبين قيمة السرد جميعه قليلاً جداً لا يعتد به ونسمى تلك القيمة حد السرد مثاله الكسر العشري ٠.٢٢٢٢٢٢٢٢ يقترب الى $\frac{١}{٤}$ الى غير نهاية ولا يصل اليه بالتمام فيكون $\frac{١}{٤}$ حد الكسر
٠.٢٢٢٢٢٢٢٢ = $\frac{٢}{١٠} + \frac{٢}{١٠٠} + \frac{٢}{١٠٠٠} + \frac{٢}{١٠٠٠٠} + \dots$ الخ فان تعددت

اجزائه السرد الى غير نهاية يكون الفرق بينه وبين $\frac{1}{3}$ صغيراً الى غير نهاية

٢٤٦ اذا هبطت اجزائه سرد بمقسوم عليه مشترك بعرف مجموعته بقاعدة جبر سلسله هندسيه

فقد راينا سابقاً ان $m = \frac{b - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}}$ اي المجموع = حاصل الجزء الاكبر في التناسب الا الجزء الاصغر مقسوماً على التناسب الا واحداً وفي سرد هابط يكون الجزء الاصغر صغيراً الى غير نهاية فيحسب لاشي فتصير العبارة

$$m = \frac{b - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \text{ او } m = \frac{b}{1 - \frac{1}{3}}$$

مثال آ ما هو مجموع هذا السرد

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{100000} + \frac{1}{1000000} + \dots$$

الجزء الاعظم $= \frac{1}{1000}$ والتناسب $= 10$

$$m = \frac{b}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{\frac{1}{1000} \times 10}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{1}{999} = \frac{1}{1000} \times 1000$$

٢ ما هو مجموع هذا السرد $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$

$$m = \frac{b}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 \times 2}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

٣ ما هو مجموع هذا السرد $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$

$$\text{الجواب } \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

٢٤٨ ثم انه يوجد مجموع بعض انواع السرد بواسطة الطرح لانه حسب

قواعد الكسور

$$\frac{1}{2 \times 3} = \frac{2 - 1}{2 \times 3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4 \times 3} = \frac{3 - 2}{4 \times 3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{0 \times 4} = \frac{4-0}{0 \times 4} = \frac{1}{0} - \frac{1}{4}$$

فان جعلت الكسور الواقعة عن اليسار في سردي فالامر واضح انه يعدل فضلة السردين المركبين من الكسور عن اليمين. وتوجد تلك الفضلة بسهولة لانه ان طرح الجزء الاول من احد هذين السردين فالباقي يعدل السرد الاخر

فلنفرض سردياً غير متناهٍ $\frac{1}{1 \times 0} + \frac{1}{0 \times 4} + \frac{1}{4 \times 2} + \frac{1}{2 \times 2}$ الخ
الخ لئلا نوجد مجموعة فنصنع منه سردياً جديداً بطرح الضلع الثاني من الخارج وليكن مجموع هذا السرد الجديد = م

$$\text{اي } م = \frac{1}{0} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \text{الخ}$$

$$\text{اذا } م - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{0} + \frac{1}{2} + \text{الخ}$$

$$\text{وبالطرح } \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \times 0} + \frac{1}{0 \times 4} + \frac{1}{4 \times 2} + \frac{1}{2 \times 2} + \text{الخ}$$

مثال آ ما هو مجموع السرد $\frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{0 \times 2} + \frac{1}{2 \times 2} + \frac{1}{2 \times 1}$ الخ
+ $\frac{1}{7 \times 0}$ الخ

$$\text{لنفرض } م = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{0} + \text{الخ}$$

$$\text{اذا } م - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{0} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \text{الخ}$$

$$\text{بالطرح } \frac{2}{3} = \frac{2}{7 \times 0} + \frac{2}{1 \times 4} + \frac{2}{0 \times 2} + \frac{2}{2 \times 2} + \frac{2}{2 \times 1} + \text{الخ}$$

$$\text{او } \frac{2}{4} = \frac{1}{7 \times 0} + \frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{0 \times 2} + \frac{1}{2 \times 2} + \frac{1}{2 \times 1} + \text{الخ}$$

آ ما هو مجموع سردي اجزائهم هذه

$$\text{الخ } \frac{1}{12 \times 10 \times 8} + \frac{1}{10 \times 8 \times 6} + \frac{1}{8 \times 6 \times 4} + \frac{1}{6 \times 4 \times 2}$$

فبتترك الجزء الاخير من الخارج والطرح لنا $\frac{1}{8} = \frac{4}{12 \times 4 \times 2} +$

$$\text{الخ } \frac{4}{12 \times 10 \times 8} + \frac{4}{10 \times 8 \times 6} + \frac{4}{8 \times 6 \times 4}$$

$$+ \frac{1}{1 \times 8 \times 6} + \frac{1}{8 \times 6 \times 4} + \frac{1}{6 \times 4 \times 2} = \frac{1}{12} \text{ او } \frac{1}{12 \times 10 \times 8} \text{ الخ}$$

٤ ما هو مجموع هذا السرد

$$\frac{1}{6 \times 0 \times 4} + \frac{1}{0 \times 4 \times 2} + \frac{1}{4 \times 2 \times 2} + \frac{1}{2 \times 2 \times 1} \text{ الخ}$$

الجواب $\frac{1}{4}$

(٢٤٩) طريقة اخرى لجمع اسراد جمعها ممكن

افرض سرّاً هابطاً فيه قوات كمية غير ثابتة القيمة مثل ك وليكن مجموعته = م
ثم اضرب جانبي المعادلة في كمية مركبة من ك وكمية اخرى ثابتة واجعل للكاف قيمة
حتى تكون قيمة الكمية المركبة المضروب فيها صفراً فان نقل جزء او اكثر الى الجانب
الاول يعدل الجانب الثاني مثلاً

$$(١) \text{ افرض } م = ١ + \frac{ك}{٢} + \frac{ك}{٣} + \frac{ك}{٤} + \frac{ك}{٥} + \frac{ك}{٦} \text{ الخ}$$

اضرب الجانبين في ك - ١ لنا

$$م \times (ك - ١) = ١ - \frac{ك}{٢ \times ١} + \frac{ك}{٣ \times ٢} + \frac{ك}{٤ \times ٣} + \frac{ك}{٥ \times ٤} \text{ الخ}$$

فان فرض ك - ١ = ٠ يصير الجانب الاول اي م $\times (ك - ١) = ٠$ ثم ينقل

$$١ - \frac{ك}{٢ \times ١} + \frac{ك}{٣ \times ٢} + \frac{ك}{٤ \times ٣} + \frac{ك}{٥ \times ٤} = ١ \text{ الى الجانب الاول لنا}$$

$$(٢) \text{ مفروض } م = ١ + \frac{ك}{٢} + \frac{ك}{٣} + \frac{ك}{٤} + \frac{ك}{٥} \text{ الخ}$$

اضرب الجانبين في ك - ١ فلنا

$$م \times (ك - ١) = ١ - \frac{ك}{٢} + \frac{ك}{٣ \times ١} + \frac{ك}{٤ \times ٢} + \frac{ك}{٥ \times ٣} \text{ الخ}$$

ثم ان فرض ك = ١ يكون ك - ١ = ٠ وينقل جزء من الى الجانب الاول لنا

$$\frac{٢}{٧ \times ٥} + \frac{٢}{٦ \times ٤} + \frac{٢}{٥ \times ٣} + \frac{٢}{٤ \times ٢} + \frac{٢}{٣ \times ١} = \frac{٢}{٢} = \frac{١}{٢} + ١$$

$$(٣) \text{ مفروض م} = ١ + \frac{ك}{٢} + \frac{ك}{٣} + \frac{ك}{٤} + \frac{ك}{٥}$$

اضرب المجانين في ٢ ك - ٢ ك + ١ فلنا

$$\frac{٦ ك}{٤ \times ٣ \times ٢} + \frac{٥ ك}{٣ \times ٢ \times ١} + \frac{٥ ك}{٢} - ١ = (١ + ك - ٢ ك) \times م$$

$$+ \frac{٧ ك}{٥ \times ٤ \times ٣}$$

وان فرض ك = ١ لنا

$$\frac{٨}{٦ \times ٥ \times ٤} + \frac{٧}{٥ \times ٤ \times ٣} + \frac{٦}{٤ \times ٣ \times ٢} + \frac{٥}{٣ \times ٢ \times ١} = \frac{٢}{٢}$$

فترى من المثالين الاخيرين ان سردين مختلفين قد يكونان من قيمة واحدة

نبذة في تعكس الاسراد

٢٥٠ لكي تعكس سرداً مثل هذا

ك = ت + ن + ب + ن + س + ن + د + ر + ن + ح
اي لتجد قيمة ن في اجزاء من ك افرض سرداً له مسميات غير معينة
فلنفرض ن = ت + ك + ب + ك + س + ك + د + ك + ر + ك + ح

ثم لتجد قيمة قوات ن بموجب هذا المفروض لنا

$$ن = ت + ك + ٢ ت + ب + ك + ٢ ت + س + ٢ ب + س + ٢ د + د + ٢ د + ح + ك$$

$$ن = ت + ك + ٢ ت + ب + ك + ٢ ت + س + ٢ ب + س + ٢ د + د + ٢ د + ح + ك$$

$$ن = ت + ك + ٢ ت + ب + ك + ٢ ت + س + ٢ ب + س + ٢ د + د + ٢ د + ح + ك$$

$$ن = ت + ك + ٢ ت + ب + ك + ٢ ت + س + ٢ ب + س + ٢ د + د + ٢ د + ح + ك$$

ثم بالتعويض عن قوات ن في السرد الاول بهذه القيمات لنا

نرى كل جزء بعد الثالث = ٢ ك في الذي قبله - ك في الذي قبل ذلك +
 ٢ ك في الثالث قبل ذلك فيكون قياس النسبة ٢ - ١ + ٢

لنفرض سردياً دآبراً ت + ب + س + د + ي + ف الخ
 فان كان قياس النسبة مركباً من جزءين كالاول المفروض سابقاً فليكونا م ون
 ثم س = ب م ك + ت ن ك = الجزء الثالث
 د = س م ك + ب ن ك = الرابع
 ي = د م ك + س ن ك = الخامس
 الخ الخ

ان كان قياس النسبة مركباً من ثلاثة اجزاء مثل الثاني المفروض سابقاً فلتكن
 م + ن + ر

ثم د = س م ك + ب ن ك + ت ر ك = الجزء الرابع
 ي = د م ك + س ن ك + ب ر ك = الخامس
 ف = ي م ك + د ن ك + س ر ك = السادس الخ

٢٥٢ في كل سردي دآبر يوجد قياس النسبة بتحويل معادلتين من هذه
 المعادلات ان كان مركباً من جزءين وتحويل ثلاث منها ان كان مركباً من ثلاثة
 اجزاء

فلنفرض ك = ١ ولناخذ الجزء الرابع والخامس مما سبق ذكرها واذا فرضنا ك
 = ١ فلنا

$$\left\{ \begin{array}{l} د = س م + ب ن \\ ي = د م + س ن \end{array} \right. \text{لنا ان نجد قيمة م ون}$$

بتحويل هاتين المعادلتين لنا

$$\frac{د س - ب ي}{س س - ب د} = م \quad \frac{س ي - د د}{س س - ب د} = ن$$

ثم في هذا السرد ١ + ٢ ك + ٥ ك + ٧ ك + ٩ ك + ١١ ك الخ
 ت ب س د ي ف
 ان جعل ك = ١ فلنا

$$م = \frac{٩ \times ٢ + ٥ \times ٧}{٧ \times ٢ - ٢٥} = ٢ \quad ن = \frac{٢٧ - ٩ \times ٥}{٧ \times ٢ - ٢٥} = ١$$

فيكون قياس النسبة ٢ - ١

٢٥٢ متى عرفنا قياس النسبة لسرد هابط نجد من ذلك مجموع السرد

$$\left\{ \begin{array}{l} ت + ب + ك + س + ك + د + ك + ي + ك + ف + ك = الخ سرداً دايراً \\ قياس النسبة له م + ن \end{array} \right.$$

فيكون ت = الجزء الاول ب = الثاني

س = ب × م + ك + ت × ن ك = الثالث

د = س × م + ك + ب × ن ك = الرابع

ي = د × م + ك + س × ن ك = الخامس الخ

فترى هنا م ك مضروباً في كل جزء الأول والاخير ون ك في كل جزء
الأخيرين وإن وهم امتداد السرد الى غير نهاية يمكن ترك الاخيرين كما لا قيمة لها
(ع^{٢٢}) وإن فرض ع = مجموع السرد فلنا

$$ع = ت + ب + م + ك \times (ب + س + د + الخ) + ن + ك \times (ت + ب + س + الخ)$$

$$وع - ت = ب + س + د + الخ \quad وع = ت + ب + س + الخ$$

$$فاذا ع = ت + ب + م + ك \times (ع - ت) + ن + ك \times ع$$

$$\text{ونحويل هذه المعادلة نصير ع} = \frac{ت + ب - ت \times م}{١ - م - ن + ك}$$

مثال آ ما هو مجموع ١ + ٦ + ١٢ + ٢٨ + ٤٨ + ١٢٠ ك الخ

قياس النسبة ٦ + ١

$$اذات = ١ \quad ب = ٦ \quad م = ١ \quad ن = ٦$$

$$\text{والجـمـوع} = \frac{٥ + ١}{١ - ٦ + ٦} ك$$

آ ما هو مجموع ١ + ٢ + ٤ + ٧ + ١١ + ١٨ + ٢٩ ك الخ

$$\text{الجواب} = \frac{٢ + ١}{١ - ٦ + ٦} ك$$

٣ ما هو مجموع $١ + ك + ٥ ك + ١٢ ك + ٤١ ك + ١٢١ ك + ٣٦٥ ك$ الخ

الجواب $\frac{١ - ك}{١ - ٢ ك - ٣ ك}$

٤ ما هو مجموع $١ + ٢ ك + ٣ ك + ٤ ك + ٥ ك$ الخ

الجواب $\frac{١ + ٢ ك - ٣ ك}{١ - (١ - ك)}$

٥ ما هو مجموع $١ + ٣ ك + ٥ ك + ٧ ك + ٩ ك + ١١ ك$ الخ

الجواب $\frac{١ + ك}{١ - (١ - ك)}$

٦ ما هو مجموع $١ + ٢ ك + ٨ ك + ٢٨ ك + ١٠٠ ك$ الخ

الجواب $\frac{١ - ك}{١ - ٣ ك - ٢ ك}$

في ترتيب الفضلات

٢٥٤ لكي نجد قيمة بعض اجزاء سرد الى حد ما يلزم التدقيق المقصود في

عمل ما يبوخذ عدة رتب من فضلات اجزاء السرد مثالة ان فرض سرد

١ ٨ ٢٧ ٦٤ ١٢٥ بطرح كل جزء ما بعده

لنا ٧ ١٩ ٢٧ ٦١ الرتبة الاولى من الفضلات

١٢ ١٨ ٢٤ الرتبة الثانية

٦ ٦ الثالثة وهلم جرا

فان فرض ت ب س دى ف الخ

فلناب - ت س - ب د - س ي - د ف - ي الخ = الاولى

س - ٢ ب + ت د - ٢ س + ب ي - ٢ د + س ف - ٢ ي + د الخ =

الثانية =

د - ٢ س + ٢ ب - ت ي - ٢ د + ٢ س - ب ف - ٢ ي + د -

س الخ = الثالثة

ي - ٤ د + ٦ س - ٤ ب + ت ف - ٤ ي + ٦ د - ٤ س + ب الخ = الرابعة

ف - ٥ ي + ١٠ د - ١٠ س + ٥ ب - ت الخ = الخامسة

فان لاحظنا مسميات هذه الاجزاء نرى مسميات الاجزاء

في الرتبة الثانية ١ ٢ ١

في الثالثة ١ ٢ ٢ ١

١ ٤ ٦ ٤ ١ في الرابعة

في الخامسة ١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١

وهي إذا كسميات قوات كميات ثنائية فتكون مسميات ع علة من رتب فضلات

$$\frac{1}{x} \times \frac{x-1}{x} \times \frac{x-1}{x} \times \dots \times \frac{x-1}{x} \times \frac{x-1}{x}$$

٢٥٥ ثم لكي نجد عبارة عمومية دالة على جزء ما في سرد مثل ت ب س د

الح لنفرض $d^1 d^2 d^3$ = الجزء الاول في الرتبة الاولى والثانية والثالثة والرابعة الخ

اِذَا دُ = ب - ن

د = س - ۲ ب + ت

• د = د - ۲ س + ۲ ب - ت

د = ی - ۴ + د ۶ + س - ۴ ب + ت الخ

بالمقابلة نجد قيمات اجزاء السرد المفروض اي ت ب س د الخ

پ = ت + د

س = ت + ۲د + د'

$$d = t + d' + d'' + d'''$$

$${}^{HH}d + {}^{IH}d + {}^{HH}d + {}^{IH}d + t = 15$$

فإذا لنا هذه العبارة للدلالة على ع جزء من سردي أوله ت

$$T + (1 - \epsilon)D + (1 - \epsilon)\left(\frac{r - \epsilon}{r}\right)D + (1 - \epsilon)\left(\frac{r - \epsilon}{r}\right)^2 D$$

مثال اول ما هو الجزء العشرون من هذا السرد

١ ٢ ٦ ١٠ ١٥ ٢١ الخ

الرتبة الاولى من فضلات = ٢ ٣ ٤ ٥ ٦

الثانية = ١ ١ ١ ١

الثالثة =

هنا ١ = د' ٢ = د' ١ = د' ٠ = د''

المجموع ١٦٥٠٦٢٥

٤	ماهو مجموع ١٥ جزءا من ٢ ٦ ١٢ ٢٠ ٢٠ الخ
٥	ماهو مجموع ٢٠ جزءا من ١ ٢ ٦ ١٠ ١٥ الخ
٦	ماهو مجموع ١٢ جزءا من ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٤٠ الخ



في المعادلات التامة من الدرجة الثالثة

٢٥٧ متى وجد في معادلة مكعب المجهول ومربعه سميت معادلة تأمة من الدرجة الثالثة وهذه عبارة عمومية لمعادلات من هذا النوع بعد نقل الاجزاء الى جانب واحد

ت ك^٢ ± ب ك^٢ ± س ك^٢ ± د = ٠

ولا بد لكل معادلة من هذا النوع من ثلاثة اجوبة كما ان المعادلات من الدرجة الثانية لها جوابان

$$\text{فلو فرضنا } (ك-١) \times (ك-٢) \times (ك-٣) = ٠ \text{ لكان لنا من ذلك } ك = ١ \text{ أو } ٢ \text{ أو } ٣$$

ولكي تعدل هذه الكميات صفراً لابد ان يكون احد الاضلاع التي حصلت المعادلة منها صفراً اي تكون ك - ١ = ٠ وك = ١ او ك - ٢ = ٠ وك = ٢ او ك - ٣ = ٠ وك = ٣ واذا عوضنا عن المجهول بكمية اخرى اية كانت غير واحدة من هذه الثلاث لم يكن الحاصل صفراً فلا يكون للمعادلة غير هذه الاجوبة الثلاثة واجوبة المعادلات هذه نسمي اصولها

٢٥٨ لاجل ايضاح كيفية استعمال اصول معادلته من هذا النوع لنفرض

ك-ف ك-ق ك-ر

وبضرب الاولى في الثانية لنا ك' - (ف + ق) ك + ف ق وان ضربت هذه في ك - ر فلنا

ك' - (ف + ق + ر) ك' + (ف ق + ف ر + ق ر) ك - ف ق ر وهذه العبارة تعدل صفراً متى كان ك - ف = ٠ وك = ف او ك - ق = ٠ وك = ق او ك - ر = ٠ وك = ر فلنعوض عن هذه المعادلة باخرى مثل ك' - ت ك' + ب ك - س = ٠ فلكي تكون الاصول الثلاثة على ما تقدم اي ك = ف او ك = ق او ك = ر يلزم ان يكون

$$(١) \quad ت = ف + ق + ر$$

$$(٢) \quad ب = ف ق + ف ر + ق ر$$

$$(٣) \quad س = ف ق ر$$

فنرى ان الجزء الثاني من المعادلة مشتمل على مجموع اصولها الثلاثة. وان الجزء الثالث منها مشتمل على مجموع حاصل كل اثنين اثنين من الاصول الثلاثة. والجزء الرابع مشتمل على حاصل الاصول الثلاثة. ونرى ايضاً ان كل معادلة من الدرجة الثالثة لا يكون لها اصولٌ منطقيةٌ الا الكميات التي تنفي الجزء الرابع منها. فمن حيث ان ذلك الجزء هو حاصل الاصول الثلاثة لا بد ان يقبل الانقسام على كل واحدٍ منها. ومن ذلك نستدل بسهولة على الكميات التي يجب ان نستخدمها في تفنيشنا على اصول المعادلة. فلو فرض ك' = ك + ٦ لكان لنا بالمقابلة ك' - ك = ٦ = ٠. ومن حيث ان هذه المعادلة ليس لها اصول منطقية الا التي تنقسم ٦ عليها نعلم ان تلك الاصول هي ثلاثة من هذه الاربعة اي ١ ٢ ٣ ٦ لان ٦ لا تنقسم الا على هذا الاربعة

$$\text{فان فرض ك} = ١ \text{ لنا } ١ - ١ - ١ = ٦ -$$

$$\text{وان فرض ك} = ٢ \text{ لنا } ٢ - ٢ - ٨ = ٦ -$$

$$\text{وان فرض ك} = ٣ \text{ لنا } ٣ - ٣ - ٢٧ = ٦ -$$

$$\text{وان فرض ك} = ٦ \text{ لنا } ٦ - ٦ - ٢١٦ = ٦ -$$

فلنا من ذلك ك = ٢ واحد من الاصول الثلاثة

فيكون ك - ٢ ضلعاً من الاضلاع التي حصلت المعادلة من ضرب بعضها في بعض. ونجد الاخر بالتسمة هكذا

فلو اردنا امتحان المعادلة بجميع الاعداد التي يمكن انقسام ٢٦ عليها لاطال به

العمل فلنفرض ك = $\frac{1}{د}$ ثم بالتعويض لنا

$$١١ + د - ٦ = ١ - \frac{٦}{د} + \frac{١١}{د} - \frac{٦}{د}$$

$$د - ٦ = ١ - \frac{٦}{د} + \frac{١١}{د} - \frac{٦}{د} \quad \text{اي } د = ١ \quad د = ٢ \quad د = ٣ \quad \text{فاذا } ك = ١ \quad ك = \frac{1}{٢} \quad ك = \frac{1}{٣}$$

٢٦١ متى كانت العلامات في المعادلة ايجابية وسلبية بالتداول كما في

المعادلات المذكورة انفا وفي هذه ك - ت ك + ب ك - س = ٠ تكون جميع الاصول

ايجابية. ولو كانت جميع العلامات ايجابية كما في هذه ك + ت ك + ب ك + س = ٠

لكانت جميع الاصول سلبية كما يتضح من ضربها مثالة ك = ٢ ك = ٣ ك = ٤

$$\text{بالمقابلة ك} - ٢ = ٠ \quad \text{ك} - ٣ = ٠ \quad \text{ك} - ٤ = ٠$$

$$\text{وبالضرب } (ك - ٢) \times (ك - ٣) \times (ك - ٤) = (ك - ٩) \times (ك - ٢٦) +$$

$$- ٢٤ = ٠$$

$$\text{ولو فرض ك} - ٢ = ٠ \quad ك - ٣ = ٠ \quad ك - ٤ = ٠$$

$$\text{لكان ك} + ٢ = ٠ \quad ك + ٣ = ٠ \quad ك + ٤ = ٠$$

$$\text{فالضرب لنا ك} + ٩ + ك + ٢٦ + ك + ٢٤ = ٠$$

فنرى ان عدد الاصول السلبية بمائل مرار تغيير العلامات في المعادلة. وعدد

الاصول ايجابية بمائل مرار تتابع العلامات المتشابهة

$$\text{وفي هذه المعادلة ك} + ٢ + ك - ٣٤ = ٠ \quad ك + ٥٦ = ٠$$

نرى العلامات تتغير من + الى - ثم من - الى + اي مرتين و+ يتبع + مرة

واحدة فقط. ونستدل بذلك ان للمعادلة اصلين ايجابيين واصلاً واحداً سلبياً. ولا بد

ان ٥٦ يقبل الانقسام على هذه الاصول و٥٦ ينقسم على ١ ٢ ٤ ٧ ٨

$$١٤ \quad ٢٨ \quad ٥٦ \quad \text{فاذا فرضنا ك} = ٢ \quad \text{فلنا } ٢ = ٨ + ٤ - ٦٨ - ٥٦ = ٠ \quad \text{فاذا}$$

ك = ٢ هو اصل واحد. ولكي نجد الاخرين نقسم على

$$ك - ٢ \quad \begin{array}{r} ك + ٢ - ٣٤ \\ ك - ٢ \end{array} \quad \begin{array}{r} ٥٦ + ك \\ ٥٦ + ك \end{array} \quad \begin{array}{r} ٢٨ - ك \\ ٢٨ - ك \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ٣٤ - ٢٨ \\ ٦ - ٢ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ٥٦ + ك \\ ٥٦ + ك \end{array}$$

والخارج ك' + ٢ ك - ٢٨ = ٠ وك' + ٢ ك = ٢٨ ك = ٤ وك - = ٧ -
(مسئلة ١) ما عددان فضلتهما ١٢ واذا ضرب حاصلهما في مجموعهما كان
الحاصل ١٤٥٦٠

لنفرض ك = اصغرها. وك' = اكبرها. وحاصلهما ك' + ١٢ ك ومجموعهما
٢ ك + ١٢ وهذا في حاصلهما يعطينا ٢ ك' + ٢٦ ك' + ١٤٤ ك = ١٤٥٦٠
وبالقسمة على ٢ ك' + ١٨ ك = ٧٢ + ٧٢٨٠ = ٧٢٨٠ ولواردنا ان نتخمن جميع
الاعداد التي تقبل ٧٢٨٠ الانقسام عليها لطلال بنا العمل ولكن نرى ان ينقسم
على ٨ فلنفرض ك = ٢ ي ثم بالتعويض لنا ٨ ي + ٧٢ ي + ١٤٤ ي = ٧٢٨٠
وبالقسمة على ٨ لنا ي + ٩ ي + ١٨ ي = ٩١٠ و ٩١٠ يقبل الانقسام على
١٠ و ٢٠ و ٥ و ٧ و ١٠ و ١٢ الى اخره فلا داعي لامتحان ١ و ٢ وه لاننا نراها من
اول وهلة صغيرة فلنتخمن اولاً ٧ اية نفرض ي = ٧ فلنا ٢٤٢ + ٤٤١
١٢٦ + ٩١٠ = ١٧٦ فاذا ي = ٧ فاذا ك + ١٤ هو واحد من اصول المعادلة
ونجد الاخرين بالقسمة هكذا

$$ي - ٧ \quad ٩ + ٢ ي + ١٨ ي - ٩١٠ \quad (ي + ١٦ ي + ١٢٠)$$

$$\begin{array}{r} ١٦ ي + ١٨ ي \\ ١٦ ي - ١١٢ ي \\ \hline ١٣٠ ي - ٩١٠ \\ ١٣٠ ي - ٩١٠ \end{array}$$

فلنا ي + ١٦ ي = ١٣٠ - ي = ٨ - ٦٦ - ٦٦ وهي كمية وهية. وذلك
بدل على ان الاصلين الآخرين وهيان فاذا ك = ١٤ و ١٢ + ١٢ = ٢٦
(مسئلة ٢) ما عددان فضلتهما ١٨ ومجموعهما في فضلة مكعبهما = ٢٧٥١٨٤
لنفرض اكبرها = ك فيكون اصغرها ك + ١٨ وكعب الاكبر ك' وكعب
الاصغر ك' + ٥٤ ك' + ٩٧٢ ك + ٥٨٢٢ ك + ٥٤ ك' + ٩٧٢ ك
٥٨٢٢ + ٥٤ ك' + ٩٧٢ ك + ١٨ ك + ١٠٨ (ك' + ١٨ ك + ١٠٨ ك + ١٨ ك + ١٠٨ ك + ١٠٨ ك)
يعطينا

$$١٠٨ (ك' + ٢٧ ك' + ٢٧٠ ك + ٩٧٢ ك) = ٢٧٥١٨٤$$

١٠٨ نصير

$$٢٠٤٨ = ٩٧٢ + ك + ٢٧٠ + ٢٧ + ك$$

$$١٥٧٦ = ك + ٢٧٠ + ٢٧ + ك$$

و ١٥٧٦ يقبل الانقسام على ١ و ٢ و ٤ و ٨ الى اخره ونرى من اول وهلة ان ١ و ٢ اصغرا مما يلزم واذا امتحنا المعادلة باربعة نجدها صحيحة. فاذا $ك = ٤$ هي واحد من اصول المعادلة. وبالقسمة على $ك - ٤$ لنا $ك + ٣١ = ٣٩٤$.

وتحويلها لنا $ك = \frac{٣١}{٢} - \left[\frac{١٥٧٦}{٤} - \frac{٩٦١}{٤} \right]$ وهي كيات وهمية. فيكون

$$العددان المطلوبان ٤ و ١٨ = ٢٢$$

(مسئلة ٢) ما عددان فضلتهما ٧٢٠ واذا ضرب اصغرهما في جذر اكبرهما يكون

الحاصل ٢٠٧٢٦ لنفرض الاصغر $ك$ والاكبر $ك + ٧٢٠$ فلنا $ك + ٧٢٠ =$

$$٢٠٧٢٦ = ٨١ \times ٤ \times ٨ \times ٨$$

بتربيع الجانبيين $ك + ٧٢٠ = ٨ \times ٨ \times ٤ \times ٨١$

ثم لنفرض $ك = ٨$ فبالتعويض لنا

$$٨١ \times ٤ \times ٨ \times ٨ = ٨ \times ٧٢٠ + ٨$$

بالقسمة على ٨ لنا $٨١ \times ٤ = ٩٠ + ١$

ثم لنفرض $٢ = ٨$ فبالتعويض لنا

$$٨١ \times ٤ \times ٨ = ٩٠ \times ٤ + ٨$$

بالقسمة على ٨ لنا $٨١ \times ٤ = ٤٥ + ١$

ثم لنفرض $٩ = ٤$ فلنا بتعويض

$$٩ \times ٤ = ٥ + ٩$$

بالقسمة على ٩ لنا $٩ = ٥ + ١$

$$٩ \times ٤ = (٥ + م) \times م$$

اذا $٤ = م$ و $٩ = ٥ + م$ و $٤ = م$

فلنا $٤٦ = ٤٧٢ = ٧٢٠ + ٥٧٦ =$ الاصغر

$$والاكبر = ١٢٩٦ = ٧٢٠ + ٥٧٦$$

ولنا طريقة اخرى لحل هذه المسئلة

لنفرض اكبرها $ك$ فالاصغر $ك - ٧٢٠$

بالضرب في $\frac{1}{2}$ لنا $\text{ك}^2 - ٧٢٠ = ٢٠٧٣٦$

اي $\text{ك}^2 - ٧٢٠ = ١٢ \times ٢٧ \times ٦٤$

لنفرض $\text{ك} = ٤$ ي فلنا $٦٤ - \text{ي}^2 = ٧٢٠ \times ٤ = ١٢ \times ٢٧ \times ٦٤$

بالقسمة على ٦٤ لنا $\text{ي}^2 - ٤٥ = ١٢ \times ٢٧$

لنفرض $\text{ي} = ٢$ ل فلنا $٢٧ - \text{ل}^2 = ١٢٥ = ١٢ \times ٢٧$

بالقسمة على ٢٨ لنا $\text{ل}^2 - ٥ = ١٢$

وهنا نرى من اول نظره ان $\text{ل} = ٢$ ومن ثم لنا

$\text{ي} = ٩ = \text{ك} = ٣٦ = \text{ك}^2 = ١٢٩٦ = \text{أكبرها}$

(مسئلة ٤) ما عددان فضلتهما ١٢ وإذا ضربت هذه الفضلة في مجموع كعبيها

كان الحاصل ١٠٢١٤٤

لنفرض $\text{ك} = \text{اصغرها}$ و $\text{ك} + ١٢ = \text{أكبرها}$

كعب الاول $= \text{ك}^3$ وكعب الثاني $= \text{ك}^3 + ٣٦\text{ك}^2 + ٤٣٢\text{ك} + ١٧٢٨$ فلنا

$١٢(٢\text{ك}^3 + ٣٦\text{ك}^2 + ٤٣٢\text{ك} + ١٧٢٨) = ١٠٢١٤٤$

بالقسمة على ١٢ و ٢ لنا $\text{ك}^3 + ١٨\text{ك}^2 + ٢١٦\text{ك} + ٨٦٤ = ٤٢٥٦$

اي $\text{ك}^3 + ١٨\text{ك}^2 + ٢١٦\text{ك} = ٣٣٩٢ = ٨ \times ٨ \times ٥٣$

لنفرض $\text{ك} = ٢$ ي ونقسم على ٨ فلنا

$\text{ي}^3 + ٩\text{ي}^2 + ٥٤\text{ي} = ٥٣ \times ٨ = ٤٢٤$

و ٤٢٤ يقبل الانقسام على ١ و ٢ و ٤ و ٨ و ٥٣ الى اخره

لنفرض $\text{ي} = ٤$ فلنا $٦٤ + ١٤٤ + ٢١٦ = ٤٢٤$

فاذا $\text{ي} = ٤ = \text{ك} = ٨ = ١٢ + ٨ = ٢٠$

(مسئلة ٥) رجال عقدوا شركة على شرط ان يضع كل واحد منهم في راس

المال من الدنانير ما يماثل عدد الشركاء عشر مرات فربحوا في المائة ٦ أكثر من

عدد الشركاء وكان كل الربح ٢٩٢ ديناراً فكم عدد الشركة

لنفرض $\text{ك} = \text{عدد الشركاء}$ ثم $١٠\text{ك} = \text{ما وضعه كل واحد}$ و $١٠\text{ك} = \text{ما}$

وضعه جميعهم والربح في المائة $\text{ك} + ٦$ فيكون ربح دينار واحد $\frac{\text{ك} + ٦}{١٠}$

وهذا في ١٠ ك = $\frac{٢ك + ٦ك}{١٠}$ = الربح كله

فلنا $٢٩٢ = \frac{٢ك + ٦ك}{١٠}$

و $٢٩٢٠ = ٢ك + ٦ك$

لنفرض ك = ٢ ي ثم نقسم على ٨ فلنا

$٤٩٠ = ٢ي + ٣ي$

و ٤٩٠ يقبل الانقسام على ١ و ٢ و ٥ و ٧ و ١٠ الى اخره

فترى من اول وهلة ان ١٠ هي اكثر ما يلزموا و ٢ و ٥ اصغر ما يلزم.

لنفرض $٧ = ي$ فلنا

$١٤٧ + ٣٤٢ = ٤٩٠$ فاذا $٧ = ي$ ك = ١٤

الشركة ١٤ وكل واحد وضع في راس المال ١٤٠ ديناراً

(مسئلة ٦) شركة في تجارة كان راس ماهر ٨٢٤٠ ديناراً فاضاف اليه كل شريك من الدنانير ما يماثل عدد الشركة ٤٠ من فربحوا في المائة من الدنانير ما يماثل عدد الشركة وعند قسمة الربح اخذ كل واحد من الدنانير ما يماثل عدد الشركة عشر مرات وبقي ٢٢٤ ديناراً فكم عدد الشركة

لنفرض ك = الشركة و ٤٠ ك = ما اضافة كل واحد من راس المال و ٤٠ ك ما اضافة الجميع و ٤٠ ك + ٨٢٤٠ = راس المال كله بعد الاضافات المذكورة

وربح في المائة ك فيكون كل الربح $\frac{٤٠ ك}{١٠٠} + \frac{٨٢٤٠ ك}{١٠٠}$ اي $\frac{٢ ك}{٥}$

$\frac{٤١٢ ك}{٥}$ ومن هذا المبلغ اخذ كل واحد ١٠ ك والكل اخذوا ١٠ ك

وبقي ٢٢٤ فلنا $\frac{٢ ك}{٥} + \frac{٤١٢ ك}{٥} = ١٠ ك + ٢٢٤$

$٢٥ ك + ٢٠٦ ك - ٥٦٠ = ٠$

فترى العلامات تنغير ثلاث مرات فتكون الاصول جميعها الجايية و ٥٦٠

يقبل الانقسام على ١ و ٢ و ٤ و ٥ و ٧ و ٨ الخ فان فرضنا ك = ٤ نجد ان المعادلة

لا تصح وكذلك اذا فرضنا ك = ٥ واذا فرضنا ك = ٧ نجد المعادلة صحيحة فاذا

ك = ٧ ونجد الاصلين الآخرين بالقسمة فلنا بعد القسمة ك' - ١٨ ك + ٨٠ = ٠
 ك = ٩ ± ١ اي ك = ٨ او ١٠ وكل واحد من هذه الاجوبة الثلاثة يطابق شروط
 المسئلة هكذا

عدد الشركاء	٧	٨	١٠
كل واحد اضاف ٤٠ ك	٢٨٠	٣٢٠	٤٠٠
الكل اضافوا ٤٠ ك'	١٩٦٠	٢٥٦٠	٤٠٠٠
راس المال	٨٢٤٠	٨٢٤٠	٨٢٤٠
٤٠ ك' + ٨٢٤٠ =	١٠٢٠٠	١٠٨٠٠	١٢٢٤٠
ربحوا في المائة ما يماثل عدد الشركاء ٧١٤	٧١٤	٨٦٤	١٢٢٤
كل واحد اخذ	٧٠	٨٠	١٠٠
الكل اخذوا	٤٩٠	٦٤٠	١٠٠٠
فبقي	٢٢٤	٢٢٤	٢٢٤

(مسئلة ٧) ما عددان مجتمعهما ١٢ وان ضرب كل واحد في جذر الآخر

كان مجموع الحاصلين ٢٠

لنفرض احدهما ك' والاخرى

(١) بشروط المسئلة ك' + ٢ = ١٢

(٢) اضف ٢ كى الى الجانين ك' + ٢ كى + ٢ = ١٢ + ٢ كى

(٣) بالتجذير ك' + ٢ = ١٢ + ٢ كى

(٤) بالشرط الثاني ك' + ٢ = ٢٠

اي كى (ك' + ٢) = ٢٠

(٥) بالقسمة ك' + ٢ = $\frac{٢٠}{ك'}$

(٦) بالمساواة بين (٢) و (٥) $\frac{٢٠}{ك'}$ = ١٢ + ٢ كى

(٧) بالترقية $\frac{٢٠}{ك'}$ = ١٢ + ٢ كى

(٨) بالمجبر ١٢ + ٢ كى = $\frac{٢٠}{ك'}$

(٩) افرض كى = ف ٢ ف + ١٢ ف = ٩٠٠

اي ف + ١٢ ف = ٩٠٠

او اذا فرض ك + ١٢ ف = ٩٠٠

فلنا من (٤) كى (ك + ١٢ ف) = ٩٠٠

و ك + ١٢ ف = ٩٠٠

اي ك + ١٢ ف = ٩٠٠

و ك + ١٢ ف = ٩٠٠

ومن (١) لنا س - ١٢ ف = ١٢

بالمقابلة ١٢ ف = س - ١٢

لنا من (٤) ف س = ٣٠

بالقسمة ف = ٣٠ / س

وبالمساواة س - ١٢ ف = ١٢

بالحجر س - ١٢ ف = ١٢

افرض س = ٥ فلنا ١٢٥ - ٦٠ = ٦٠

و ف س = ٣٠ ف = ٦

ك = ٦ ك = ٦ / س

س = ٣ س = ٩ ك = ٢ ك = ٤



الفصل الثاني والعشرون

في حل المعدلات من كل درجة بالاستقراء

٢٦٢ قد تقدم القول ان حاصل اصول معادلة ما يعدل جزءها الاخير.

فن النظر الى هذا الجزء يمكننا ان نفرض احد الاصول فرضاً تقريبياً. واذا فرضنا للاصل قيمتين وامتنعناهما بالتعويض بهما عن المجهول في المعادلة نجد الخطأ. ثم نصلح المفروضين على موجب هذه النسبة

نسبة فضلة الخطأين الى فضلة المفروضين كالمفروض الاصغر الى الاصلاح المقتضي له

ونكرر هذا العمل حتى نصل الى المطلوب ونسئ هذه الطريقة استفراة ويسهل العمل اذا فرضنا عددين فضلتهما ١٠ او ١٠٠ الى اخره

(١) مفروض ك^٢ - ٨ ك^٢ + ١٧ ك - ١٠ = ٠ مطلوب قيمة ك
نرى في هذه المعادلة ان العلامات تغيرت ثلاث مرات فيقتضي ان تكون
الاصول الثلاثة ايجابية وان يكون حاصلها ١٠ ومجموعها ٨ (٢٥٨)
فلنفرض احدها ١٥ او ٢٥

بالاول	بالثاني
ك ^٢ = ١٣٢٦٥١	١٤٠٦٠٨
- ٨ ك ^٢ = - ٢٠٨٠٨	- ٢١٦٢٢
١٧ ك = ٨٦٧	٨٨٤
- ١٠ = - ١٠٠	١٠٠ -
الخطآن = ١٢٧١ +	٢٦٨٨ +
بالطرح	١٢٧١
فضلة الخطأين	١٤١٧ +

ثم بالنسبة ١٤ : ١ :: ١٢٧ : ١٠٩ اي ١٠٩ يجب طرحها
من المفروض الاول فلنا ١٥ - ١٠٩ = ٩٠١
ثم لنفرض ك = ١٥ او ٢٥

بالاول	بالثاني
ك ^٢ = ١٢٥٧٥١	١٢٦٥٠٦
- ٨ ك ^٢ = - ٢٠٠٨	- ٢٠١٦
١٧ ك = ٨٥١٧	٨٥٣٤
- ١٠ = - ١٠٠	١٠ -
الخطآن = ١٢١ +	٢٤٦ +

$$\text{وبالطرح } ٢٤٦ = ١٢١ - ١٢٥$$

$$\text{ثم } ١٢٥ : ١ : ١٢١ :: ١ : ١٠ = \text{الاصلاح}$$

١٠ - ٥ = ٥ وهي تطابق المعادلة فلنا ك = ٥ واحد من
الاصول الثلاثة وبالقسمة

$$(ك - ٥) ك - ٨ = ١٧ + ك - ١٠ (ك - ٣ + ٢ = ٥)$$

وباتمام الترييع الى اخره ك = ٢ او ١ وهذه الاصول الثلاثة اي ٥ و ٢ و ١ بعد
تبديل علاماتها يكون مجتمعا - ٨ وحاصلها - ١٠

$$(٢) \text{ ما هي اصول هذه المعادلة } ك - ٨ = ٤ + ك = ٤٨$$

$$\text{الجواب } ٢ - ٤ + ٦$$

$$(٣) \text{ ما هي اصول هذه المعادلة } ك - ١٦ = ٦٥ + ك = ٥٠$$

$$\text{الجواب } ١ \quad ٥ \quad ١٠$$

$$(٤) \text{ ما هي اصول هذه المعادلة } ك + ٢ = ٣٣ - ك = ٩٠$$

$$\text{الجواب } ٦ - ٥ - ٢$$

(٥) مطلوب اصل من اصول هذه المعادلة تقريبا وهي ك + ٩ = ٢

$$٤ = ٨٠$$

(٦) مطلوب اصل من اصول هذه المعادلة تقريبا وهي ك + ٢ = ١٠٠

٢٦٣ طريقة اخرى

لنفرض ر = عددا قد وجدنا بالامتحان انه يعدل قيمة المجهول ك تقريبا.
ولنفرض ل = الفرق بين ر والاصل الحقيقي ك ثم في المعادلة المفروضة نعوض عن
ك بواسطة ر + ل ونسقط الاجزاء المئوية قوات من ل فتصير المعادلة بسيطة.
مثالة

$$(١) \text{ مفروض } ك - ١٦ = ٦٥ + ك = ٥٠$$

$$\text{لنفرض } ك = ر - ل$$

$$٥٠ = \begin{cases} \text{فلنا } ك = ر - ١٦ = ٢٢ + ر - ١٦ - ل \\ \text{فلنا } ك = ر - ١٦ = ٢٢ + ر - ١٦ - ل \\ \text{فلنا } ك = ر - ١٦ = ٢٢ + ر - ١٦ - ل \end{cases}$$

باسقاط الاجزاء التي فيها ل' ول' لنا

$$ر' - ١٦ = ر' + ٦٥ - ر' ٢ + ر' ٢ - ر' ٢٢ - ل' ٦٥ = ٥٠$$

$$و \quad ل = \frac{٥٠ - ر' + ر' ١٦ - ر' ٦٥}{٦٥ - ر' ٢٢ + ر' ٢ - ر' ٢}$$

ثم لنفرض $ر = ١١$ فإذا $ل = \frac{٦٠}{٧٦} = ٠.٧٨$ تقريباً

$$ك = ر - ل = ١١ - ٠.٧٨ = ١٠.٢٢$$

ثم افرض $ر = ١٠.٢٢$ في المعادلة الاخيرة فلنا $ل = ١٨٨.٠٧$ و $ر - ل = ١٠.٢٢ - ١٨٨.٠٧$

$$\text{افرض } ر = ١٠.٢٢ \text{ فلنا } ل = ٠.١٢$$

$$و \quad ر - ل = ١٠.٢٢ - ٠.١٢ = ١٠ = ك$$

(٢) نطلب اصلاً هذه المعادلة تقريباً وهي $ك' + ١٠ = ك + ٥ = ٢٦٠٠$

الجواب ١١.٠٠٦٧

$$(٣) \text{ ما هي اصول هذه المعادلة } ك' + ٢ = ك' - ١١ = ك = ١٢$$

$$(٤) \text{ ما هي اصول هذه المعادلة } ك' + ٤ = ك' - ٧ = ك' - ٢٤ = ك = ٢٤$$



الفصل الثالث والعشرون

في المسائل الغير المحدودة وهي السبالة

٢٦٤ ان كانت المعادلات التي تتركب من شروط مسألة اقل عدداً من مجاهيلها تكون المسألة غير محدودة. ويمكن ان يفرض لاحد المجاهيل اية قيمة كانت فتخرج البقية بالنسبة الى المفروض. وفي مسائل هذا الباب تستعمل القواعد السابقة ولكن ينبغي التبصر والاحتياال لكي توجد الطريقة الفضلى لاستعمالها في كل مسألة بمفردها. فلو طلب عددان صحيحان ايجابيان مجتمعا عشرة وفرضا احدهما ك والاخر $ي$ كان لنا $ك + ي = ١٠$ $ك - ي = ١٠$ فكيف $ي$ لم نتخذ بالمسألة سوى ان تكون صحيحة ايجابية فيمكن ان نفرض لها اية قيمة صحيحة كانت من ١ الى ١٠ ولكن

يجب ان تكون ك ايضاً صحيحة ايجابية فلا تُفرض ي أكثر من ١٠ والا لكانت ك سلبية فلا تكون ي أكثر من ٩

فان فرض ي = ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ تكون ك = ٩ ٨ ٧ ٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١ والمجموعات الاربع الاخيرة هي مثل الاربع الاولى. فيكون للمسئلة خمسة اجوبة

(مسئلة ١) اقسم ٢٥ الى قسمين احدهما قابل الانقسام على ٢ والاخر على ٣

لنفرض احدها ٢ ك والاخر ٣ ي

$$\text{فلنا } ٢ ك + ٣ ي = ٢٥ \quad ك = \frac{٢٥ - ٣ ي}{٢}$$

فترى من هذا الكسر ان ٣ ي اقل من ٢٥ فيكون ي اقل من ٨ واذا

قسما صورة الكسر على المخرج فلنا ك = ١٢ - ي + $\frac{١ - ي}{٢}$ فترى ان ١ -

ي او بالاحرى ي - ١ يقبل الانقسام على ٢

لنفرض ي - ١ = ٢ ل فاذا ي = ٢ ل + ١

وبالتعويض ك = ١٢ - ٢ ل - ١ = ١١ - ٢ ل ولا يمكن ان

تكون ي أكثر من ٨ فنفرض ل اي عدد كان على شرط ان لا يكون ٢ ل + ١

أكثر من ٨ فلا بد ان تكون ل اقل من ٤ ولا تكون أكثر من ٣

فان فرض ل = ٠ ل = ١ ل = ٢ ل = ٣

لنا ي = ١ ي = ٢ ي = ٣ ي = ٥ ي = ٧

و ك = ١١ ك = ٨ ك = ٥ ك = ٢

فاذا ٢ ك + ٣ ي = ٢٢ + ٢ او ٢٢ + ٩ او ٢٢ + ١٠ او ٢٢ + ١٥

(مسئلة ٢) اقسم ١٠٠ الى قسمين احدهما يقبل الانقسام على ٧ والاخر على ١١

لنفرض القسمين ٧ ك و ١١ ي فلنا ٧ ك + ١١ ي = ١٠٠ ك =

$$\frac{١٠٠ - ١١ ي}{٧} = \frac{٩٨ - ١١ ي}{٧} = \frac{١٤ - ي}{١} \quad ي = ١٤ - ٧ ك$$

فاذا ٢ - ٧ ي او ٤ ي - ٢ يقبل الانقسام على ٧ وان كان ٤ ي - ٢ يقبل الانقسام

اربعة اجوبة فاذا فرض ل = ٠ لنا ك = ٢ ي = ٧٤ ٢٨ = ١٩ × ٢ و ٩٦٢ = ١٢ × ٧٤

ل = ١ ك = ١٥ ي = ٥٥ ٢٨٥ = ١٩ × ١٥ و ٧١٥ = ١٢ × ٥٥

ل = ٢ ك = ٢٨ ر = ٢٦ ٥٢٢ = ١٩ × ٢٨ و ٤٦٨ = ١٢ × ٢٦

ل = ٣ ك = ٤١ ي = ١٧ ٢٢١ = ١٢ × ١٧ و ٧٧٩ = ١٩ × ٤١

(مسئلة ٦) رجل انفق ١٧٧٠ دينارا في شراء خيل وبقر وكان ثمن راس الخيل ٢١ دينارا وثمان راس البقر ٢١ دينارا فكم راسا اشترى من كل جنس لنفرض ك = الخيل وى = البقر فلما

٢١ ك + ٢١ ي = ١٧٧٠ اي ٢١ ي = ١٧٧٠ - ٢١ ك = ١٧٦٤ + ٦ - ٢١ ك - ١٠ ك

ي = ٨٤ - ك + $\frac{١٠ - ٦}{٢١}$

فلا بد من ان ١٠ ك - ٦ يقبل الانقسام على ٢١ وكذلك نصفها اي ٥ ك - ٣ فلنفرض ٥ ك - ٣ = ٢١ ل فلما ٥ ك = ٢١ ل + ٣ وبالتعويض ي = ٨٤ - ك - ٢ ل = ك = $\frac{٢ - ٢١ ل}{٥} + ٤$ فلنفرض

ل = ٢ + ٥ ر ٥ ر ل = ٢ - ٣ ك = ٢١ ر - ١٢

ي = ٨٤ - ٢١ ر - ١٢ + ١٠ ر + ٦ = ١٠ ر - ١٠٢ + ٢١ ر

فلا بد ان تكون ر اكبر من صفر واقل من ٤

فلنفرض ر = ١ فلما ك = ٩ ي = ٧١ ٢٧٩ = ثمن الخيل و ١٤٩١ = ثمن البقر

= ثمن البقر

ر = ٢ فلما ك = ٣٠ ي = ٤٠ ٩٢٠ = ثمن الخيل و ٨٤٠ = ثمن البقر

ر = ٣ ك = ٥١ ي = ٩ ١٥٨١ = ثمن الخيل و ١٨٩ = ثمن البقر

٢٦٥ في المسائل المتقدم ذكرها كانت المعادلات على هيئة ت ك + ب

ي = س وكانت ت وب وس كميات ايجابية صحيحة. وقيمة ك وى كذلك. ولكن

ان كانت ب سلبية والمعادلة على هيئة ت ك - ب ي = س تكون المسائل من نوع اخر غير المتقدمة ولها اجوبة كثيرة الى ما لا نهاية له. ومثاله لو قيل اي عدد ين فضلها ٦

فلو فرضنا اصغرهما ك واكبرها ي لكان لنا

ي - ك = ٦ ي = ٦ + ك فيمكننا ان نفرض بآ اي عدد شئنا كما هو واضح من اول نظرية

٢٦٦ متى كان س = ٠ تكون ت ك = ب ي

كما لو قيل نريد عددا يقبل الانقسام على ٥ وعلى ٧

ولنفرضه ن فلنا ن = ٥ ك ون = ٧ ي وه ك = ٧ ي ك = $\frac{٧ ي}{٥}$ فلان

٧ لا يقبل الانقسام على ٥ فلا بد ان ي يقبل الانقسام عليها. فلنفرض ي = ٥ ل فاذا

ك = ٧ فتكون ن = ٣٥ ل ويمكننا ان نفرض ل اي عدد شئنا. فلنا ٣٥

٧٠ ١٠٥ ١٤٠ ١٧٥ ٢١٠ الى اخره

ولو زيد على الشروط المذكورة ان العدد يقبل الانقسام على ٩ ايضا لكان لنا

ما تقدم ن = ٣٥ ل ولنفرض ن = ٩ ر ل = ٣٥ ر = ٩ ر = $\frac{٣٥ ر}{٩}$ ولا بد

ان ل تقبل الانقسام على ٩ فلنفرض ل = ٩ س فلنا ر = ٣٥ س ون =

٩ × ٣٥ = ٣١٥ س فلنا ٣١٥ و ٦٣٠ و ٩٤٥ الى اخره

٢٦٧ ان لم تكن س = ٠ فتعسر المسئلة اكثر فلو قيل ما العدد الذي

يقبل الانقسام على ٥ واذا انقسم على ٧ بقي ٢ فلنا ٥ ك = ن و ٧ ي = ٢ + ن فاذا

٥ ك = ٧ ي + ٢ ك = $\frac{٧ ي + ٢}{٥}$ ك = $\frac{٢ + ٧ ي}{٥}$

ي + $\frac{٢ + ٧ ي}{٥}$ فلنفرض ٢ + ٧ ي = ٥ ل

ل = $\frac{٢ + ٧ ي}{٥}$ فاذا ك = ي + ل = ٢ + ٧ ي = ٥ ل - ٢ ي =

$\frac{٢ - ٧ ي}{٢} + ل = \frac{٢ - ٧ ي}{٢}$ ولنفرض ل - ٢ = ٢ ر فاذا ل =

٢ + ر و ٦ + ر = ٥

ك = ي + ل = (٥ + ر ٦) + (٢ + ر ٣) = ٧ + ر ٩
 فإذا ن = ٣٥ + ر ٤٥ فيمكن ان نفرض ر اي عدد صحيح شيئاً ايجابياً
 او سلبياً اذ يكفي ان تكون ن ايجابية. فان فرض ر = -١ لنا ن = ١٠
 وبإضافة ٢٥ لنا ٤٥ ٨٠ ١١٥ ١٥٠ الى اخره

ثم ان حل مسائل من هذا النوع يتيسر او يتعسر حسب النسبة الواقعة بين
 الاعداد المنقسم عليها ومن المسائل السهلة هذه

اي عدد اذا انقسم على ٦ يبقى ٢ واذا انقسم على ١٢ يبقى ٢ فلنفرض العدد
 ن فلنا
 $٦ + ك = ن$ $١٢ + ي = ن$ $٦ + ك = ٢ + ي$ $١٢ = ك - ي$
 ي + ١

ك = $\frac{١٢ + ي}{٦} = ٢ + \frac{٢ + ي}{٦}$ لنفرض $١ + ي = ٦$
 $١ - ل = ي$ $١ - ك = ٢ + ي$ $١٢ - ل = ٢$
 ن = ٧٨ - ١٠ فلنا

ن = ٦٨ ١٤٦ ٢٢٤ ٣٠٢ ٣٨٠ الى اخره
 (مسئلة ٨) اي عدد اذا انقسم على ٣٩ يبقى ١٦ واذا انقسم على ٥٦ يبقى ٢٧
 لنفرض ن = ٣٩ + ف ١٦ ن = ٥٦ + ق ٢٧
 ٣٩ + ف ١٦ = ٥٦ + ق ٢٧

ف = $\frac{٥٦ + ق}{٣٩} = ١ + \frac{١٧ + ق}{٣٩}$ افرض $\frac{١٧ + ق}{٣٩} = ١$
 $١١ - ر ٥ = ١٧ + ق$ $١١ - ر ٣٩ = ١٧ + ق$ $١١ - ر ٥ = ١٧ + ق$

افرض $\frac{١١ - ر ٥}{١٧} = ١$ ثم $١١ - ر ٥ = ١٧$ س = ١١ - ر ٥
 $\frac{١١ + س ٢}{٥} = ١$ س = ٢

افرض $\frac{١١ + س ٢}{٥} = ١$ ت = ١١ + س ٢
 $\frac{١١ - ت ٥}{٢} = ١$ س = ٢

$$\text{افرض } \frac{11-11}{3} = د \quad ت = 11 + د٢$$

فقد خلصنا من الكسور ولنعوّض عن كل كمية بقيمتها

$$ت = 11 + د٢$$

$$س = ٢٢ + د٥$$

$$ر = ٧٧ + د١٧$$

$$ق = ١٧٦ + د٢٩$$

$$ف = ٢٥٣ + د٥٦$$

$$ن = ١٨٨٢ + د٥٦ \times ٢٩ = ١٦ + (٢٥٣ \times ٢٩) + د٥٦ \times ٢٩$$

$$\text{ون} = ١٨٨٢ + د٢٩ \times ٥٦ = ٢٧ + (١٧٦ \times ٥٦) + د٢٩ \times ٥٦$$

$$\text{اي} ن = ١٨٨٢ + د٢١٨٤ = \frac{١٨٨٢}{٢١٨٤} + ٤ \quad \text{فلا تكون د اقل}$$

من - ٤ وعلى هذا المفروض لنا ان $١١٤٧ = ٤ - \text{ك}$ فلنا ن =

$٢١٨٤ + \text{ك} = ١١٤٧$ وهما على سلسلة حسابية الحلقة الاولى منها ١١٤٧ وفضلها

المشترك ٢١٨٤ فلنا ١١٤٧ و ٢٢٣١ و ٥٥١٥ و ٧٦٩٩ و ٩٨٨٣ الى اخره

(مسئلة ٩) رجال ونساء جمعوا صدقة فدفعت كل رجل ٢٥ غرشاً وكل امرأة

١٦ غرشاً. فكان ما دفعته النساء جميعهن اكثر مما دفعه الرجال جميعهم بغرش

واحد. فكم رجلاً وكم امرأة كانوا

لفرض الرجال ق والنساء ف فلنا

$$١٦ ف = ٢٥ ق + ١ \quad ف = \frac{١ + ٢٥ ق}{١٦} = \frac{١ + ق}{١٦}$$

$$ق + ١٦ ر = ٩ ق + ١$$

$$ق = \frac{١ - ١٦ ر}{٩} + ر = \frac{١ - ٧ ر}{٩} \quad ٩ س = ٧ - ر$$

$$ر = \frac{١ + س}{٧} + س = \frac{١ + ٢ س}{٧} \quad ٧ ت = ٢ + س$$

$$س = \frac{٧ - ت}{٣} = \frac{١ - ت}{٣} + ت = \frac{١ - ٢ ت}{٣} + ت$$

باخراج ٢ ت من الجانبيين لنا ٢ = د - ت - ١

ت = د + ١ ثم بالتعويض في هذه المعادلات

ت = د + ١ س = ٢ ت + د = ٢ + د ٧

ر = س + ت = ٩ + د ٤

ق = ر + س = ١٦ + د ٧

ف = ق + ر = ٢٥ + د ١١

فكان عدد النساء ٢٥ + د ١١ وعد الرجال ١٦ + د ٧ فنفرض د أي
عدد صحيح شيئاً فلنا الرجال = ٧ ٢٢ ٢٩ ٥٥ ٧١ الى اخره
والنساء ١١ ٢٦ ٦١ ٨٦ ١١١ الى اخره

وعلى موجب الجواب الاول دفعت النساء ١٧٦ والرجال ١٧٥ غرشاً

(مسئلة ١٠) رجل اشترى خيلاً وبقراً وكان ثمن راس الخيل ٢١ ديناراً وثمان

راس البقر ٢٠ ديناراً فكان ثمن البقر بقدر ثمن الخيل و٧ دنانير زيادة فكم راساً
اشترى من كل جنس

لنفرض ف = البقر وق = الخيل فلنا

$$ف = \frac{٢١ + ق}{٢} = ق + \frac{١١ + ق + ٧}{٢} = ق + ر = ٢٠$$

١١ + ق ٧

$$ق = \frac{٢٠ - ر}{١١} + ر = \frac{٩ - ر}{١١} + ر = ١١ س - ٩$$

$$ر = \frac{١١ + س}{٩} + س = \frac{٢ + س + ٧}{٩} = س + ت = ٩$$

٢ + س ٧

$$س = \frac{٩ - ت}{٢} + ت = \frac{٤ - ت}{٢} + ت = د + ٢ = ت$$

٧ - فلنا ت = د + ٢

$$س = ٤ + د = ٩ + د ٢٨$$

$$ر = س + ت = ١١ + د ٢٥$$

$$ق = ر + س = ٦٣ + ١٢٠ = ١٨٣$$

$$ف = ق + ر = ١٨٣ + ٦٣ = ٢٤٦$$

ونجد قيمة ف وق الصغرى اذا فرضنا $د = -٢$

$$فلنا البقر = ٥ \quad ٢٦ \quad ٦٧ \quad ٩٨ \quad ١٢٩ \quad ١٦٠ \text{ الى اخره}$$

$$فلنا الخيل = ٢ \quad ٢٣ \quad ٤٢ \quad ٦٣ \quad ٨٣ \quad ١٠٣ \text{ الى اخره}$$

(مسئلة ١١) اي عدد اذا انقسم على ١١ يبقى ٢ واذا انقسم على ١٩ يبقى ٥

$$\text{لنفرض } ن = ١١ف + ٢ \quad ن = ١٩ق + ٥ \quad ١١ف = ١٩ق + ١١$$

فاذا تصرفنا في هذه المسئلة على نسق المسائل المتقدم ذكرها يكون لنا بمجل

الاعداد الواقعة فيها

$$٨ + ١١ \times ١ = ١٩ \quad ف = ق + س$$

$$٢ + ٨ \times ١ = ١١ \quad ق = ر + س$$

$$٢ + ٢ \times ٢ = ٨ \quad ر = ٢س + ٢$$

$$١ + ٢ \times ١ = ٢ \quad س = ث + ٢$$

$$٠ + ١ \times ٢ = ٢ \quad ث = ٢د + ٢$$

$$\text{ثم لنا ث} = ٢ + ٢د = ٢ \quad س = ٢ + ٢د$$

$$ر = ٦ + ٢د = ٨ \quad ق = ١١ + ٢د$$

$$ف = ١٩ + ٢د = ١٤ \quad \text{لنفرض } د = ٠$$

فلنا $ن = ١١ف + ٢ = ١١(١٩ + ٢د) + ٢ = ٢٠٩ + ٤٢د = ٢٠٩$ ولكن

$٢٠٩ = ٠$ فاذا ١٥٧ هو اقل عدد تصح عليه شروط المسئلة

(مسئلة ١٢) ما العدد الذي اذا انقسم على ١١ يبقى ٢ واذا انقسم على ١٩

يبقى ٥ واذا انقسم على ٢٩ يبقى ١٠

قد مضى حساب الشرطين الاولين في المسئلة السابقة فلنا هنا زيادة عما هناك

$$ن = ٢٩ف + ١٠ \quad \text{وقد وجدنا هناك ان}$$

$$ن = ٢٠٩ + ٢٩ف \quad \text{فلنفرض هنا } ن = ٢٠٩ + ٢٩ق$$

$$\text{فلنا } ٢٩ف + ١٠ = ٢٠٩ + ٢٩ق \quad \text{اي}$$

$$٢٩ف = ٢٠٩ + ٢٩ق - ١٠ = ١٩٩ + ٢٩ق \quad \text{ثم لنا حسبنا تقدم}$$

$$٦ + ٢٩ \times ٧ = ٢٠٩ \quad \text{ف} = ٧ + \text{ق} + \text{ر}$$

$$٥ + ٦ \times ٤ = ٢٩ \quad \text{ق} = ٤ + \text{ر} + \text{س}$$

$$١ + ٥ \times ١ = ٦ \quad \text{ر} = \text{س} + \text{ت}$$

$$٠ + ١ \times ٥ = ٥ \quad \text{س} = ٥ + \text{ت} - ١٤٧$$

$$\text{ثم بالتعويض س} = ٥ + \text{ت} - ١٤٧$$

$$\text{ر} = ٦ + \text{ت} - ١٤٧ \quad \text{ق} = ٢٩ + \text{ت} - ٧٢٥$$

$$\text{ف} = ٢٠٩ + \text{ت} - ٥٢٩٢$$

$$\text{ن} = ٦٠٦١ + \text{ت} - ١٥٢٤٥٨ \quad \text{ونجد العدد الاقل}$$

$$\text{اذا فرضنا ت} = ٢٦ \quad \text{ثم ن} = ٤١٢٨$$

(مسئلة ١٢) على كم طريقة يمكن دفع ١٠٠ غرش في بشالك بسعر ٥ غروش وانصاف المانوت بسعر ٩ غروش

$$\text{لنفرض ه} = \text{ك} = \text{البشالك} \quad ٩ = \text{ي} = \text{ع} \quad \text{انصاف المانوت}$$

$$\text{ه} = \text{ك} + ٩ = \text{ي} = ١٠٠ \quad \text{ه} = \text{ك} = ١٠٠ - ٩ = \text{ي} = ١٠٠ - ٥ - \text{ي} = ٤ - \text{ي}$$

$$\text{ك} = ٢٠ - \text{ي} - \frac{٤}{٥}$$

$$\text{فاذا ي} = ٢٠ \quad \text{فلنفرض} \frac{\text{ي}}{٥} = \text{ف} = \text{ي} = ٥ = \text{ف} = \text{ك} = ٢٠$$

$$\text{ه} = \text{ف} - ٤ = ٢٠ - ٩ = \text{ف} = ٩ \quad \text{فاذا تكون ف اقل من} \frac{٢٠}{٩} \quad \text{ايه اقل من ٢}$$

$$\text{واكثر من صفراي} \quad ١ \quad \text{فلنفرض ف} = ١ \quad \text{فاذا ك} = ١١ \quad ١١ = ٥ \times ١١ = ٥٥$$

$$\text{ي} = ٥ = ٥ \times ٩ = ٤٥ \quad \text{وه} = ٤٥ + ٥٥ = ١٠٠ \quad \text{ايه ليس لذلك الا}$$

طريقة واحدة

$$(مسئلة ١٤) على كم طريقة يمكن دفع ١٠٠ غرش غوازي بسعر ٢٠ غرشاً$$

$$\text{وفرنكات بسعر ٤ غروش} \quad \text{لنفرض الغوازي} = ٢٠ = \text{ك} \quad \text{والفرنكات} = ٤ = \text{ي}$$

$$\text{ك} + ٤ = \text{ي} = ١٠٠ \quad ٤ = \text{ي} = ١٠٠ - ٢٠ = \text{ك}$$

$$\text{ي} = ٢٥ - \text{ك} \quad \text{لنفرض} ٢٥ - \text{ك} = \text{ف} = \text{ثم}$$

$$\text{ه} = \text{ك} = ٢٥ - \text{ف} = \text{ك} = ٥ - \frac{\text{ف}}{٥} \quad \text{لنفرض ف} = ٥ = \text{د} = \text{ك} = ٥ - \text{د}$$

ي = ٥ د فلا بد ان تكون د أكثر من صفر واقل من ٥ اي للمسئلة اربعة اجوبة.
فعلى فرض

$$د = ١ \quad ك = ٤ \quad ي = ٥ \quad اي \quad ١٠٠ = ٢٠ + ٨٠$$

$$د = ٢ \quad ك = ٣ \quad ي = ١٠ \quad اي \quad ١٠٠ = ٤٠ + ٦٠$$

$$د = ٣ \quad ك = ٢ \quad ي = ١٥ \quad اي \quad ١٠٠ = ٦٠ + ٤٠$$

$$د = ٤ \quad ك = ١ \quad ي = ٢٠ \quad اي \quad ١٠٠ = ٨٠ + ٢٠$$

(مسئلة ١٥) ثلثون نفرا من رجال ونساء واولاد انفقوا ٥٠ ديناراً وكل رجل منهم انفق ٣ دنانير وكل امرأة دينارين وكل ولد ديناراً واحداً. فكم كان كل فريق

لنفرض الرجال = ف والنساء = ق والاولاد = ر

$$\text{فلنا (١) } ٣٠ = ر + ق + ف$$

$$\text{وايضاً (٢) } ٢٠ = ر + ٢ق + ٣ف$$

$$\text{من الاولى لنار } ٣٠ - ف - ق = ٢٠$$

$$\text{فنرى ان } ٢٠ = ق + ف$$

$$\text{وبالتعويض في (٢) } ٢٠ = ٢٠ + ق + ٣ف$$

$$\text{بالمقابلة والجمع } ٢٠ - ٢٠ = ق - ٣ف$$

$$\text{بنقل ف واحدة } ٢٠ = ق - ٣ف$$

وذلك ايضاً اقل من ٣٠ فبشروط المسئلة لا تكون ف أكثر من ١٠ ويمكن

ان نفرض ف اي عدد شينا من ١ الى ٩ فلنا

$$ف = ١ \quad ٢ \quad ٣ \quad ٤ \quad ٥ \quad ٦ \quad ٧ \quad ٨ \quad ٩$$

$$ق = ١٨ \quad ١٦ \quad ١٤ \quad ١٢ \quad ١٠ \quad ٨ \quad ٦ \quad ٤ \quad ٢$$

$$ر = ١١ \quad ١٢ \quad ١٣ \quad ١٤ \quad ١٥ \quad ١٦ \quad ١٧ \quad ١٨ \quad ١٩$$

(مسئلة ١٦) رجل اشترى من البقر والمعزى والغنم ١٠٠ راس بمائة دينار

وكان ثمن الراس من البقر $\frac{١}{٣}$ دينار وثن الراس من المعزى $\frac{١}{٢}$ دينار وثن الراس

من الغنم $\frac{١}{٢}$ دينار. فكم راساً اشترى من كل جنس

لنفرض ف = البقر ق = المعزى و = الراس

$$\text{فلنا (١) } 100 = ر + ق + ف$$

$$(٢) \quad 100 = ر + ق + ف + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\text{اضرب في ٦} \quad 600 = ر + ق + ف + 2 + 2 + 2$$

$$\text{بالاولى لنا} \quad 100 = ر - ق - ف$$

$$\text{عوضاً عن ر في (٢)} \quad 200 = ق + ١٨ + ف$$

$$٥ = ق - ٢٠٠ + ١٨ \quad ٥ = ق - ١٨٠$$

فلا بد ان $٥ = ق - ١٨٠$ فلنفرض $٥ = ق$ فلنا $٥ = ق$

س ١٨

$١٢ = ر + ٤٠$ فيمكن ان نفرض قيمة س اي عدد شئنا على شرط ان ق

لا نصير بذلك سلبية فلا يمكن ذلك الا على فرض س اقل من ٤

$$\text{فلنا س} = ٢ \quad ٢ \quad ١$$

$$\text{ف} = ١٥ \quad ١٠ \quad ٥$$

$$\text{ق} = ٦ \quad ٢٤ \quad ٤٢$$

$$\text{ر} = ٧٩ \quad ٦٦ \quad ٥٢$$

٢٦٧ في اختراع مسائل من هذا الباب ينبغي الاحتراس من استحاليتها. ولا بد في ذلك من ملاحظة ما سنذكره هنا. فنضع عوض المعادلتين اللتين في المسئلة السابقة هاتين

$$ك + ي + ل = ت$$

$$ف + ك + غ + ي + ح = ل$$

حيث تكون ف غ ح ت ب معلومات

فان فرضنا ف اكبر من غ وح اصغر من غ و ضربنا الجانبيين في ف اي $(ك + ي + ل) ف = ف ت$ فلا شك ان تكون ف ك + ف ي + ف ل اكبر من ف ك + ف غ + ف ي + ف ح وتكون ف ت اكبر من ب اي $ب < ف ت$ وايضاً اذا فرضنا $(ك + ي + ل) ح = ح ت$ تكون ح ك + ح ي + ح ل اصغر من ف ك + ف غ + ف ي + ف ح وتكون ح ت اصغر من ب اي $ب < ح ت$ فاذا ان لم تكن ب اصغر من ف ت واكبر من ح ت نستحيل المسئلة فاذاً يجب ان تقع ب بين الحدين ف ت ح ت ولا يجب ان تكون قريبة جداً من احدها ولا فلا يمكن استعمال

الاحرف الأخر في المسئلة السابقة ت = ١٠٠ ف = $\frac{1}{3}$ ح = $\frac{1}{4}$ والحدان
ها ٢٥٠ و ٥٠ وان فرضنا ب = ٥١ عوض ١٠٠ كما في المسئلة فلنا
ك + ي + ل = ١٠٠

$$\frac{1}{3} ك + \frac{1}{4} ي + \frac{1}{4} ل = ٥١ \quad \text{اضرب الاولى في ٢}$$

$$\frac{2}{3} ك + \frac{1}{2} ي + \frac{1}{2} ل = ١٠٢ \quad \text{اضرب الثانية في ٦}$$

$$٢١ ك + ٨ ي + ٢ ل = ٢٠٦$$

$$\text{بالطرح} \quad ١٨ ك + ٥ ي = ٦$$

وذاك محال لانه يفرض كون ك وى صحيحين

(مسئلة ١٧) صايع عنه من الفضة ثلاثة انواع

الاول في كل ٨ دراهم منه ٧ فضة ودرهم زيف

الثاني . . . $\frac{1}{4}$. . . $\frac{1}{3}$.

الثالث . . . $\frac{1}{4}$. . . $\frac{1}{3}$.

فاراد ان بصوغ مصاغاً وزنه ٢٤٠ درهماً في كل ٨ دراهم منه ٦ دراهم فضة
ودرهان زيف فكم درهماً يجب ان ياخذ من كل صنف

لنفرض ما يجب اخذه من النوع الاول = ك ومن الثاني = ي ومن الثالث

$$= ل \quad \text{فلنا} \quad ك + ي + ل = ٢٤٠ \quad \text{ويكون في الكل} \quad ٧ ك + \frac{1}{4} ي + \frac{1}{3} ل = ٤٨٠$$

من الفضة الخالصة ووزن هذا المزيج = ٢٤٠ درهماً و $\frac{٢٤٠}{٨} = ٣٠$

$$\text{و} \quad ٣٠ \times ٦ = ١٨٠ = \text{الفضة الخالصة في المزيج}$$

$$\text{فلنا} \quad ٧ ك + \frac{1}{4} ي + \frac{1}{3} ل = ١٨٠$$

$$\text{اضرب في ٢} \quad ١٤ ك + ١١ ي + ٢ ل = ٣٦٠$$

$$\text{اضرب الاولى في ٩} \quad ٩ ك + ٩ ي + ٩ ل = ٢٧٠$$

$$\text{بالطرح} \quad ٥ ك + ٢ ي = ٩٠$$

$$\text{من الاولى} \quad ل = ٣٠ - ك - ي$$

$$\text{وايضاً} \quad ٢ = ٩٠ - ٥ ك - ي \quad \text{ف} \quad ٤٥ = ٣٠ - ي - \frac{٥ ك}{٢}$$

لنفرض ك = ٢ د فلنا $٥٠ - ٤٥ = ي$

وايضاً $١٥ - ٢ = ل$

فلابد ان تكون د اكبر من ٤ واصغر من ١٠ فلنا

٩	٨	٧	٦	٥ = د
١٨	١٦	١٤	١٢	ك = ١٠
.	٥	١٠	١٥	ي = ٢٠
١٢	٩	٦	٣	ل = ٠

(مسئلة ١٨) رجل اشترى من الخيل والبقر والحجير والغنم ١٠٠ رأس بمائة دينار وكان ثمن رأس الخيل ١٠ دنانير وثمان رأس البقر ٥ دنانير وثمان الحمار دينارين وثمان رأس الغنم نصف دينار فكم اشترى من كل جنس. لنفرض الخيل = ف البقر = ق الحجير = ر والغنم = س

فلنا (١) $١٠٠ = س + ر + ق + ف$

و (٢) $١٠ = ف + ٥ ق + ٢ ر + \frac{١}{٣} س = ١٠٠$

اضرب في ٢ $٢٠ = ف + ١٠ ق + ٤ ر + \frac{٢}{٣} س = ٢٠٠$

بالطرح $١٠٠ = ر + ٩ ق + ٢ ف$

بالمقابلة والتقسمة $ر = ٢٣ - \frac{١}{٣} ف - ٦ ق - \frac{١}{٣} ف - ٢ ق$ اي

$$ر = ٢٣ - ٦ ق - ٢ ق + \frac{١ - ف}{٣}$$

فاذا $١ - ف$ او $١ - ف$ يقبل الانقسام على ٣

لنفرض $١ - ف = ٣ ت$ ف $٢ = ت + ١ ق = ر$ $٢٧ - ١٩ = ت$

$٣ - ق = س = ٧٢ + ٢ ق + ١٦ = ت$

فاذا تكون $١٩ = ت - ٢ ق$ اقل من ٢٧ وعلى هذا الشرط نفرض ك و ت اي عدد شيناً

(١) $٠ = ت$ (٢) $١ = ت$

$١ = ف$ $٤ = ف$

$ق = ق$ $ق = ق$

$$\begin{aligned} \text{ر} &= ٢ - ٨ = ٢ \\ \text{س} &= ٢ + ٧٢ = ٧٤ \end{aligned}$$

ولا يمكن ان نفرض $\text{ت} = ٢$ لان بذلك نصير رسليية. وعلى المفروض الاول
لا تكون ق اكثر من ٩ وعلى الثاني لا تكون اكثر من ٢ فعلى الاول لنا

$$\begin{aligned} \text{ق} &= ١ \quad ٢ \quad ٣ \quad ٤ \quad ٥ \quad ٦ \quad ٧ \quad ٨ \quad ٩ \quad ١٠ \\ \text{ف} &= ١ \quad ١ \quad ١ \quad ١ \quad ١ \quad ١ \quad ١ \quad ١ \quad ١ \quad ١ \\ \text{ق} &= ٠ \quad ١ \quad ٢ \quad ٣ \quad ٤ \quad ٥ \quad ٦ \quad ٧ \quad ٨ \quad ٩ \\ \text{ر} &= ٢٧ \quad ٢٤ \quad ٢١ \quad ١٨ \quad ١٥ \quad ١٢ \quad ٩ \quad ٦ \quad ٣ \quad ٠ \\ \text{س} &= ٧٢ \quad ٧٤ \quad ٧٦ \quad ٧٨ \quad ٨٠ \quad ٨٢ \quad ٨٤ \quad ٨٦ \quad ٨٨ \quad ٩٠ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{وعلى الثاني} \quad \text{ت} &= ١ \quad ٢ \quad ٣ \\ \text{ف} &= ٤ \quad ٤ \quad ٤ \\ \text{ق} &= ٠ \quad ١ \quad ٢ \\ \text{ر} &= ٨ \quad ٥ \quad ٢ \\ \text{س} &= ٨٨ \quad ٩٠ \quad ٩٢ \end{aligned}$$

(مسئلة ١٩) مطلوب ثلثة اعداد صحيحة اذا ضرب الاول منها في ٣ والثاني
في ٥ والثالث في ٧ يكون مجموع الحواصل ٥٦٠. واذا ضرب الاول في ٩ والثاني
في ٢٥ والثالث في ٤٩ يكون مجموع الحواصل ٢٩٢٠

$$\text{لنفرض (١) } ٣\text{ك} + ٥\text{ي} + ٧\text{ل} = ٥٦٠$$

$$\text{(٢) } ٩\text{ك} + ٢٥\text{ي} + ٤٩\text{ل} = ٢٩٢٠$$

$$\text{اضرب الاولى في ٣ } ٩\text{ك} + ١٥\text{ي} + ٢١\text{ل} = ١٦٨٠$$

$$\text{بالطرح } ١٠\text{ي} + ٢٨\text{ل} = ١٢٤٠$$

$$\text{بالقسمة على ٢ } ٥\text{ي} + ١٤\text{ل} = ٦٢٠$$

$$\text{وبالمقابلة والقسمة } \frac{١٤}{٥} - ١٢٤ = \text{ي}$$

$$\text{لنفرض ل} = ٥ \text{ فاذًا } ١٢٤ - ١٤ = ١١٠$$

$$\text{ثم بالتعويض في الاول لنا } ٣\text{ك} - ٢٥ = ٦٢٠ \quad ٥٦٠ = ٦٢٠ + ٢٥ - ٣\text{ك}$$

$$\text{اي } ٣\text{ك} = ٦٠ - ٢٥ = ٣٥$$

$$ك = \frac{٢٥}{٢} - ٢٠ \quad \text{فلنفرض } د = ٢ ت$$

فإذا $ك = ٢٥ ت - ٢٠$ $٢٠ - ٢٥ ت = ١٢٤ - ٤٢ ت$ $١٥ = ١٠ ت$ فتكون
ت أكبر من صفر وصغر من ٢ ولنا جوابان فقط اي

$$١ = ت \quad ١٥ = ك \quad ٨٢ = ١٠$$

$$٢ = ت \quad ٥٠ = ك \quad ٤٠ = ١٠$$

(مسئلة ٢٠) مطلوب عدنان مجتمعهما مع حاصلهما ٧٩

لنفرض العددين ك وى فلنا $ك + ١٠ = ٧٩$ $ك + ١٠ = ٧٩$

$$ك - ٧٩ = \frac{٨٠ - ٧٩}{١ + ك} + ١ - ٧٩ = \frac{٨٠ - ٧٩}{١ + ك} + ١ - ٧٩$$

الانقسام على ك + ١ و ٨٠ يقبل الانقسام على ١ ٢ ٤ ٥ ٨ ١٠ ١٦
٨٠ ٤٠ ٢٠

$$\text{فإذا } ك = ٠ \quad ١ \quad ٢ \quad ٤ \quad ٥ \quad ٨ \quad ١٠ \quad ١٩ \quad ٢٩ \quad ٧٩$$

$$٧٩ = ٢٩ \quad ٢٩ = ١٩ \quad ١٩ = ١٠ \quad ١٠ = ٩ \quad ٩ = ٧ \quad ٧ = ٤ \quad ٤ = ٣ \quad ٣ = ١ \quad ١ = ٠$$

ومن هذه العشرة الخمسة الاخيرة مثل الخمسة الاولى فلنا في الحقيقة ٥ اجوبة فقط وهي

$$٠ = ك \quad ١ \quad ٢ \quad ٤ \quad ٧$$

$$٧٩ = ٢٩ \quad ١٩ \quad ١٠ \quad ٩$$

(مسئلة ٢١) اربعة رجال تزلوا الى السوق فوجدوا جوهرة نباع فقالوا كم

ثمن الجوهرة ف قيل اذا اخذ ما مع الاول منكم مع $\frac{١}{٢}$ ما مع الثاني و $\frac{١}{٣}$ ما مع الثالث و $\frac{١}{٤}$ ما مع الرابع كان المجتمع ثمن الجوهرة واذا اخذ ما مع الثاني و $\frac{١}{٥}$ ما مع الاول و $\frac{١}{٦}$ ما مع الثالث و $\frac{١}{٧}$ ما مع الرابع كان المجتمع ثمن الجوهرة واذا اخذ ما مع الثالث مع $\frac{١}{٨}$ ما مع الاول و $\frac{١}{٩}$ ما مع الثاني و $\frac{١}{١٠}$ ما مع الرابع كان المجتمع ثمن الجوهرة واذا اخذ ما مع الرابع و $\frac{١}{١١}$

مما مع الاول و $\frac{1}{12}$ مما مع الثاني و $\frac{1}{12}$ مما مع الثالث كان المجتمع ثمن الجوهرة
مطلوب اصغر الاعداد الصحيحة التي تضع عليها شروط المسئلة

نرى من شروط المسئلة ان الحصة الصغرى للاول من الاربعة فلنفرض
الرجال ك وى ول ون وثمان الجوهرة ت فلنا

$$\frac{12 \text{ ت} - 12 \text{ ك} - 6 \text{ وى} - 4 \text{ ل}}{3} = \text{ت} = \frac{\text{ن}}{4} + \frac{\text{ل}}{3} + \frac{\text{وى}}{2} + \text{ك}$$

$$\frac{210 \text{ ت} - 42 \text{ ك} - 210 \text{ وى} - 30 \text{ ل}}{30} = \text{ت} = \frac{\text{ن}}{7} + \frac{\text{ل}}{6} + \frac{\text{ك}}{5} + \text{وى}$$

$$\frac{360 \text{ ت} - 40 \text{ ك} - 40 \text{ وى} - 360 \text{ ل}}{36} = \text{ت} = \frac{\text{ن}}{10} + \frac{\text{وى}}{9} + \frac{\text{ك}}{8} + \text{ل}$$

$$\frac{1716 \text{ ت} - 106 \text{ ك} - 142 \text{ وى} - 142 \text{ ل}}{1716} = \text{ت} = \frac{\text{ل}}{13} + \frac{\text{وى}}{13} + \frac{\text{ك}}{11} + \text{ن}$$

ثم بالمساواة

$$\frac{12 \text{ ت} - 12 \text{ ك} - 6 \text{ وى} - 4 \text{ ل}}{3} = \frac{210 \text{ ت} - 42 \text{ ك} - 210 \text{ وى} - 30 \text{ ل}}{30}$$

$$\frac{210 \text{ ت} - 42 \text{ ك} - 210 \text{ وى} - 30 \text{ ل}}{30} = \frac{360 \text{ ت} - 40 \text{ ك} - 40 \text{ وى} - 360 \text{ ل}}{36}$$

$$\frac{360 \text{ ت} - 40 \text{ ك} - 40 \text{ وى} - 360 \text{ ل}}{36} = \frac{1716 \text{ ت} - 106 \text{ ك} - 142 \text{ وى} - 142 \text{ ل}}{1716}$$

$$\frac{100 \text{ وى} - 78 \text{ ك} - 90 \text{ ت}}{0} = \text{ل}$$

$$\frac{540 \text{ ت} + 27 \text{ ك} + 1060 \text{ وى}}{1090} = \text{ل}$$

$$\frac{46322 \text{ ت} - 5967 \text{ ك} - 5291 \text{ وى}}{51084} = \text{ل}$$

بالمساواة ايضا

$$\frac{100 \text{ وى} - 78 \text{ ك} - 90 \text{ ت}}{0} = \frac{540 \text{ ت} + 27 \text{ ك} + 1060 \text{ وى}}{1090}$$

$$\frac{540 \text{ ت} + 27 \text{ ك} + 1060 \text{ وى}}{1090} = \frac{46322 \text{ ت} - 5967 \text{ ك} - 5291 \text{ وى}}{51084}$$

$$\frac{2917 \text{ ت} + 24821 \text{ ك}}{47640} = \text{وى}$$

$$\frac{٧٦٨٠٤٢٠ \text{ ت} - ١٨١١١٣٣ \text{ ك}}{١٠٤٢٦٩٥٥} = \text{ي}$$

بالمساواة أيضاً

$$\frac{٢٩١٦٠ \text{ ت} + ٢٤٨٣١ \text{ ك}}{٤٦٦٤} = \frac{٧٦٨٠٤٢٠ \text{ ت} - ١٨١١١٣٣ \text{ ك}}{١٠٤٢٦٩٥٥}$$

$$\frac{٢٤٠٧٢٢٣٦٠ \text{ ت}}{١٥٢٦١٤٦٥٠١} = \text{ك}$$

فإذا ت قبل الانقسام على مخرج هذا الكسر. ولكي يكون لنا عدد صحيح يجب
ان نفرض ت هذا المخرج ذاته. فلنا ت = ١٥٢٦١٤٦٥٠١

$$٢٤٠٧٢٢٣٦٠ = \text{ك} \quad ١٠٨٢٣٣٣٩٨٨ = \text{ي}$$

$$١٢٤٣٩٥٧٨٠٦ = \text{ل} \quad ١٢١٨٢٧٨١٨٠ = \text{ن}$$

$$٢٤٠٧٢٢٣٦٠ = \text{ك} \quad ١٠٨٢٣٣٣٩٨٨ = \text{ي}$$

$$٥٤١١٦٦٩٩٤ = \frac{\text{ي}}{٢} \quad ٤٨١٤٦٤٧٢ = \frac{\text{ك}}{٥}$$

$$٤١٤٦٥٢٦٠٢ = \frac{\text{ل}}{٢} \quad ٢٠٧٢٢٦٢٠١ = \frac{\text{ل}}{٦}$$

$$٢٢٩٥٩٤٥٤٥ = \frac{\text{ن}}{٤} \quad ١٨٨٣٣٩٧٤٠ = \frac{\text{ن}}{٧}$$

$$١٥٢٦١٤٦٥٠١ = \text{ت} \quad ١٥٢٦١٤٦٥٠١$$

$$١٢٤٣٩٥٧٨٠٦ = \text{ل} \quad ١٢١٨٢٧٨١٨٠ = \text{ن}$$

$$٣٠٠٩١٥٤٥ = \frac{\text{ك}}{٨} \quad ٢١٨٨٤٧٦٠ = \frac{\text{ك}}{١١}$$

$$١٢٠٢٥٩٣٣٢ = \frac{\text{ي}}{٩} \quad ٩٠١٩٤٤٩٩ = \frac{\text{ي}}{١٢}$$

$$١٢١٨٢٧٨١٨ = \frac{\text{ن}}{١٠} \quad ٩٥٦٨٩٠٦٢ = \frac{\text{ل}}{١٣}$$

$$١٥٢٦١٤٦٥٠١ = \text{ت} \quad ١٥٢٦١٤٦٥٠١$$

(مسئلة ٢٢) مطلوب عددان مربعان يكون مجموعهما مربعاً ايضاً

$$٢ = ت \quad ك = \frac{١٢}{٤} = \frac{٤+٩}{٤} \quad ك + ت = ٣ + \frac{١٢}{٤} = \frac{٢٥}{٤}$$

$$ك - ت = \frac{١٢}{٤} - ٣ = \frac{١}{٤}$$

$$٤ = ت \quad ك = \frac{٤+١٦}{٤} = ٥ \quad ك + ت = ٩ \quad ك -$$

ت = ١ وهلم جرّاً

(مسئلة ٢٤) لنا ان نجد ثلاثة اعداد مربعة على سلسلة حسابية

لنفرض الاعداد ك' وى' ول' ثم ك' + ل' = ٢' اى' افرض ك' = ف + ق - ل' ثم ك' + ل' = ٢' ف' + ق' = ٢' اى' ف' + ق' = ٢' ف' فنفرض ف' =

$$\frac{٢٢}{١-٢م} \text{ حيث } ق = ت$$

$$\text{ثم } ك' = ف + ق = ت + \frac{٢٢}{١-٢م}$$

$$ل' = ف - ق = ت - \frac{٢٢}{١-٢م}$$

$$٢' = \frac{٢(١+٢م)}{١-٢م} = ٢' ق' + ٢' ف'$$

فيمكن ان نفرض ت وم اى عدد شنا

لنفرض ت = ٢ ور = ٢' ثم ك' = ٧ ي = ٥ ل' = ١ والاعداد

المطلوبة هي ١ ٢٥ ٤٩

افرض ت = ٨ م = ٢' ثم ك' = ١٤ ي = ١٠ ل' = ٢ والاعداد

هي ٤ ١٠٠ ١٩٦

(مسئلة ٢٥) مفروض ٢٤ ك' = ١٢ ي + ١٦ فا هي قيمة ك' وى صحيحة

الجواب ك' = ٥ ي = ٨

(٢٦) مفروض ٨٧ ك' + ٢٥٦ ي = ١٥٤١٠ مطلوب قيمة ك' الصغرى

الجواب ك' = ٢٠ ي = ١٢٨٠٠

وقيمة ي الكبرى في صحيح

(٢٧) كم قيمة صحيحة للاحرف في $٥ ك + ٧ ي + ١١ ل = ٢٢٤$

الجواب ٦٠

(٢٨) رجل اشترى ٢٠ طائراً بعشرين غرشاً اي اوزاً بسعر الطير باربعة

غروش وحمائماً بسعر الطير نصف غرش وعصافير بسعر الطير $\frac{1}{4}$ غرش فكم اشترى

من كل جنس
الجواب اوز ٢ حمام ١٥ عصافير ٢

(٢٩) ما هو العدد الاصغر الذي يقبل الانقسام على الاعداد الطبيعية من

١ الى ٩ بدون باقي
الجواب ٢٥٢٠

تنبيه . هذا الباب واسع جداً ويمكن الامتداد فيه الى ما لا نهاية له . وقد اكتفينا

بما ذكرناه طلب الاختصار . ولا يمكن وضع قواعد خصوصية لكثير من مسائله وما

نقدم شرحه كافٍ للدلالة على الحيل التي يستعان بها في حل هذه

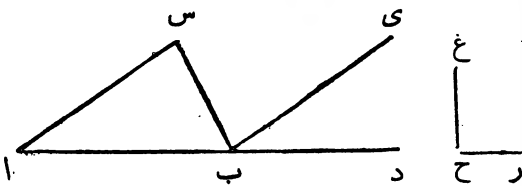


الفصل الرابع والعشرون

في استعمال الجبر في مسائل هندسية

٢٦٨ قد يمكن ان نكتب البراهين الهندسية في عبارات جبرية . مثاله في

ان الزوايا الثلاث من كل مثلث تعدل قائمتين



(١) حسب اقليدس (ق ٢٩ ك ١) $ي ب د = د ب ا س$

(٢) $و س ب ي = ا س ب$

(٣) بالجمع $ي ب د + د ب ا س = ب ا س + ا س ب$

(٤) اضع ا ب س للجانبين فتصير $س ب د + د ب ا س = ب ا س + ا س ب$

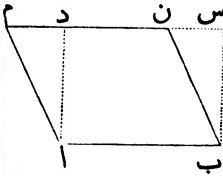
ا س ب + ا ب س

(٥) حسب اقليدس (ق ١٣ ك ١) $س ب د + ا ب س = ٢ غ ح ر$

(٦) بمساواة (٤) و (٥) $ب ا س + ا س ب + ا ب س = ٢ غ ح ر$ اي

فأبتين

٢٦٩ تُعرف مساحة معين بضرب القاعدة في العمود عليها. مثالة في شكل



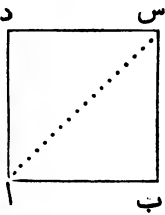
ا ب ن تكون مساحته $ا ب \times س$ او $م ن \times ا د$

لان $ا ب \times ب س =$ مساحة شكل $س ا$ وحسب

اقليدس (ق ٢٦ ك ١) اشكال متوازية الاضلاع على

قواعد متساوية وبين خطين متوازيين هي متساوية اي

$س ا = م ب$

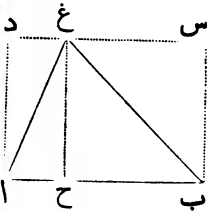


٢٧٠ نعرف مساحة المربع بضرب احد اضلاعه في

نفسه. مثالة مساحة المربع $ا ب س د = ا ب$ لانه

$ا ب \times ب س = ب س$ و $ب س = ا ب$

٢٧١ مساحة المثلث هي نصف حاصل القاعدة في علو المثلث. مثالة مساحة



مثلث $ا ب غ =$ نصف $ا ب \times غ ح$ او $ا ب \times$

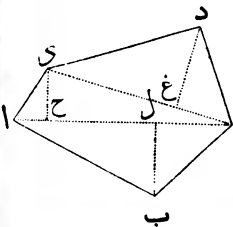
$ب س$ او $ح غ$ لان شكل $ا ب س د = ا ب \times$

$ب س$ وحسب اقليدس ق ٤١ ك ١ ان كان مثلث

وشكل متوازي الاضلاع على قاعدة واحدة وبين خطين

متوازيين فيكون المثلث نصف الشكل. وعلى هذا القياس لنا عبارة جبرية دالة على

مساحة اي شكل فرض اضلاعه مستقيمة. لان كل شكل نظير ذلك يمكن انقسامه



الى مثلثات. مثاله في شكل $ا ب س د$ فيه

مثلثات $ا ب س$ $ا س ي$ $ي س د$ ومساحة $ا ب س$

$= \frac{1}{2} ا س \times ب ل$ ومساحة $ا س ي = \frac{1}{2} ا س \times$

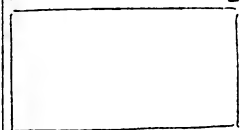
$ح ي$ و $ي س د = \frac{1}{2} ي س \times د غ$ وكل الشكل

$$= \left(\frac{1}{2} \text{ اس} \times \text{ب ل}\right) + \left(\frac{1}{2} \text{ اس} \times \text{ح ي}\right) + \left(\frac{1}{2} \text{ ي س} \times \text{د غ}\right)$$

٢٧٢ نحتاج أحيانا ان نعكس هذا العمل وان نستعمل اضلاع شكل من

مساحته . فيعرف طول مستطيل من قسمة المساحة على عرضه . مثالة ان فرض

مساحة د ب = ك فضلع ا د = $\frac{\text{ك}}{\text{س د}}$ ويؤخذ



ضلع مربع باخذ الجذر المالي من مساحته .
وتعرف قاعدة مثلث بقسمة مساحته على نصف علوه

٢٧٣ رابعا ان مساحة سطح يبدل عليه بمحصل طولوه في عرضه فيدل على

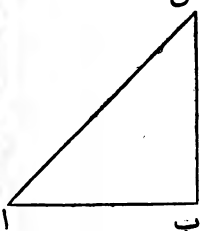
مساحة الجسم بطولوه في عرضه في عمقه

عملية آ مفروض قاعدة مثلث قائم الزاوية ا ب س س

ومجموع الوتر والساق فلنا ان نجد الساق

لنفرض ا ب = ن ب س = ك مجموع الوتر والساق

ك + ا س = ت وبمقابلة ك نصبر ا س = ت - ك



(١) حسب اقليدس ق ٤٧ ك ا ب س + ا ب = ا س

(٢) وحسب ما فرض ك + ن = (ت - ك) = ت - ت = ت - ك + ك

بالمقابلة ت ك = ت - ن وك = $\frac{\text{ت} - \text{ن}}{\text{ت}}$ ب س الضلع

المطلوب ا ب في كل مثلث قائم الزاوية يعدل العمود مربع مجموع الوتر والعمود الآ

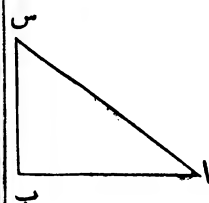
مربع القاعدة منقسم على مضاعف مجموع الوتر والعمود

ع ٢ مفروض قاعدة مثلث قائم الزاوية وفضله الوتر

والعمود فلنا ان نجد العمود

لنفرض ا ب = ت = ٢٠ ب س = ك وفضلتها

= ف = ١٠ فيكون الوتر ا س = ك + ف



(١) حسب اقليدس ق ٤٧ ك ا ب س + ا ب = ا س

(٢) وبالمفروض (ك + ف) = ت + ك

(٣) بالبسط ك + ٢ ك ف + ف = ت + ك

(٤) بالمقابلة والقسمة ك = $\frac{ت - ف}{٢}$ = ١٥

٣ ع مفروض وتر مثلث قائم الزاوية ٣٠ ذراعاً، وفضلة الضلعين الآخرين
٦ اذرع، فما هو طول القاعدة
الجواب ٢٤ ذراعاً

٤ ع مفروض وتر مثلث قائم الزاوية ٥٠ ذراعاً، ونسبة القاعدة الى العمود
كسبة ٤ : ٣ فما هو طول العمود.
الجواب ٣٠ ذراعاً

٥ ع مفروض محيط شكل متوازي الاضلاع
وفطره مثل شكل ا ب س دفلنا ان نجد اضلاعه
لنفرض الفطر ا س = ح = ١٠
وضلع ا ب = ك

نصف المحيط ب س + ا ب = ب س + ك = د = ١٤
بمقابلة ك نصير ب س = د - ك

حسب اقليدس ق ٤٧ ك ١ ا ب + ب س = ا س

وحسب المفروض ك = (د - ك) + ح

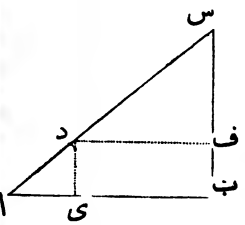
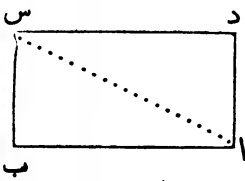
اذّا ك = $\frac{١}{٢} د + \frac{١}{٢} (د - ك) + ح$ = ٨ = ا ب

وب س = د - ك = ١٤ - ٨ = ٦

٦ ع مفروض مساحة مثلث قائم الزاوية ا ب س
واضلاعه شكل متوازي الاضلاع مرسوم فيه، فلنا
ان نجد الضلع ب س

لنفرض المساحة = ع و د ي = ف ب = ب س
ي ب = د ف = د ب س = ك اذّا س ف =
ب س - ب ف = ك - ب

(١) بمشابهة المثلثات س ف : د ف :: ب س : ا ب



(٢) او حسب المفروض ك - ب : د :: ك : ضلع اب

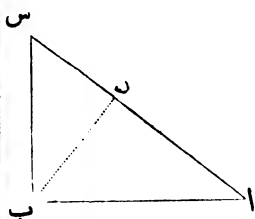
(٢) و $د ك = (ك - ب) \times اب$

(٤) حسب رقم ٢٧١ ع $اب \times \frac{١}{٢} ب س = اب \times \frac{١}{٢} ك$

(٥) بالقسمة على $\frac{١}{٢} ك = \frac{ع ٢}{ك} = اب$

(٦) $د ك = (ك + ب) \times \frac{ع ٢}{ك} = ع ٢ - \frac{ع ٢}{ك}$

(٧) $و ك = \frac{ع}{د} + \frac{ع}{د} - \frac{ع ٢}{د} = \frac{ع ٢}{د} = ب س$



ع ٧ مفروض ثلاثة اضلاع مثلث قائم الزاوية
اب س فلنا ان نجد قسبي الوزر الحادتين من عمودي
مرسوم من القائمة على الوزر حسب اقليدس (ق ٨
ك ٦) بقسم المثلث الى اثنين كل واحد منها قائم
الزاوية

(١) حسب اقليدس ق ٤٧ ك ١ $\overline{ب د} + \overline{د س} = \overline{ب س}$

(٢) بالشكل $س د = اس - اد$

(٣) ربع الجانين $\overline{س د} = (اس - اد)$

(٤) اذا بالتعويض في (١) $\overline{ب د} + (اس - اد) = \overline{ب س}$

(٥) بالسط $\overline{ب د} + اس - اس \times اد + اد = \overline{ب س}$

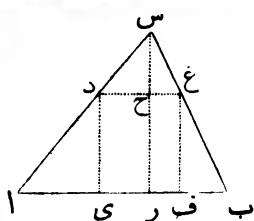
(٦) بالمقابلة $\overline{ب د} = \overline{ب س} - اس + اس \times اد - اد$

(٧) حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١) $\overline{ب د} = \overline{اب} - اد$

(٨) بمساواة (٦) و (٧) $\overline{ب س} - اس + اس \times اد = \overline{اب}$

(٩) بالمقابلة $اس \times اد = \overline{اب} + اس - \overline{ب س}$

(١٠) بالقسمة $\frac{\overline{اب} + اس - \overline{ب س}}{اس} = اد$



ع ٨ مفروض مساحة شكل دى ف غ
متوازي الاضلاع مرسوم في مثلث اب س فلنا
ان نجد اضلاعه

ارسم س ر عمودياً على اب وحسب المفروض
دغ يوازي اب اذا

مثلث س غ ح يشبه مثلث س ر ب

و . س د غ . . س اب

فلنفرض س ر = د و اب = ب و دغ = ك والمساحة = ع

(١) بمشابهة المثلثات س ب : س غ :: اب : دغ

(٢) و س ب : س غ :: س ر : س ح

(٣) ومساواة النسب اب : دغ :: س ر : س ح

(٤) اذا $\frac{دغ \times س ر}{اب} = س ح$

(٥) بالشكل س ر - س ح = ح ر = دى

(٦) بالتعويض س ر - $\frac{دغ \times س ر}{اب} = دى$

(٧) وبالمفروض د - $\frac{دك}{ب} = دى$

(٨) ع = دغ \times دى = ك \times (د - $\frac{دك}{ب}$)

(٩) اي ع = دك - $\frac{دك^2}{ب}$

(١٠) بالتحويل ك = $\frac{ب}{٢} \pm \left[\frac{ب^2}{٤} - \frac{ع ب}{د} \right]$ دغ

ثم يعرف دى بقسمة المساحة على دغ

ع ٩ لنا ان نرسم من نقطة مفروضة في دائرة مفروضة خطأ مستقيماً حتى يكون

بين جزئيه الواقعين بين النقطة والمحيط فضلة مفروضة

وب = الخط المنصف اذا ك = (ت + س) $\times \frac{ت - س}{ت س}$

ع ١٦ مفروض وتر مثلث قائم الزاوية ٣٥ وضع مربع مرسوم فيه (مثل شكل دى ف ب فى ع ١٦) = ١٢ مطلوب الضلعان الآخران من المثلث
الجواب ٢٨ و ٢١

ع ١٧ فى مثلث قائم الزاوية كانت الازرع فى محيطه مساوية للازرع المربعة فى مساحته ونسبة القاعدة الى العمود :: ٤ : ٣ مطلوب طول كل ضلع من اضلاعه
الجواب ٦ و ٨ و ١٠

ع ١٨ دائر طوله ١٨ ذراعاً وعرضها ١٢ ذراعاً يحيط بها ممشي متساوي العرض ومساحته تساوي مساحة الدار. فاهو عرض الممشى

ع ١٩ حقله زواياها قائمة نسبة ضلع منها الى آخر :: ٦ : ٥ وسدس مساحتها ١٢٥ قسبة مربعة فاهو طول الاضلاع

ع ٢٠ فى مثلث قائم الزاوية نسبة مساحته الى مساحة مستطيل مفروض :: ٥ : ٨ والضلع الاقصر من كل واحد منها ٦٠ قسبة. والضلع الاخر من المثلث المتوالي للقائمة مساو لقطر المستطيل فاهي مساحة المثلث والمستطيل
الجواب ٤٨٠٠ و ٣٠٠٠ قسبة مربعة

ع ٢١ صندوقان زواياها قائمة اعظمها يسع ٢٠ قدماً مكعباً اكثر من اصغرها ومساحة الاصغر الى مساحة الاكبر :: ٤ : ٥ وقاعدتاها مربعتان وضلع الواحد مساو لعنى الصندوق الآخر فاهو عنى الصندوقين
الجواب ٤ و ٥ اقدام

ع ٢٢ مفروض طول ثلاثة خطوط عمودية مرسومة من نقطة داخل مثلث متساوي الاضلاع الى الاضلاع الثلاثة فاطول الاضلاع

لنفرض ت وب وس = الخطوط العمودية وك = نصف احد الاضلاع اذا

$$ك = \frac{ت + ب + س}{٣}$$

ع ٢٢ مساحة مربعة احاط بها سوق متساوي العرض وطول ضلع الساحة ثلاث قصبات اقل من تسعة اضعاف عرض السوق والقصبات المربعة في السوق اكثر من القصبات في محيط الساحة بمايتين وثمانية وعشرين فما هي مساحة الساحة الجواب ٥٧٦ قصبة مربعة

ع ٢٤ مفروض طول خطين مرسومين من الزاويتين الحادتين من مثلث قائم الزاوية الى نقطة انتصاف الضلعين المتقابلين. فلنا ان نجد طول الاضلاع لنفرض ك = نصف القاعة وى = نصف العمود وت وب = الخطبين المفروضين اذا

$$\sqrt{\frac{٤ب - ٢ت}{١٥}} = وى \quad \sqrt{\frac{٤ب - ٢ت}{١٥}} = ك$$

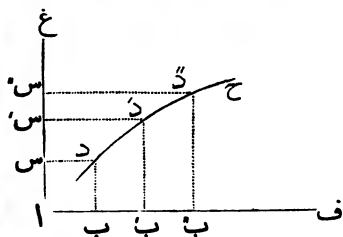


الفصل الخامس والعشرون

في تعديل المنحنيات

٢٧٤ قد نظرنا في ما تقدم الى استعمال الجبر في معرفة اشكال هندسية محاطة بخطوط مستقيمة. فلننظر الان الى مناسبة الجبر لمعرفة الخطوط المنحنية وكيفية الدلالة على خصائصها ونسبة بعضها الى بعض بواسطة معادلة

ان اوضاع نقط خطي منحني مرسوم على سطح مستوي نعين من بعد كل واحدة عن



خطبين مستقيمين احدهما عمودي على الاخر
ليكن ا غ اف عمودين احدهما على الاخر
ود ب ود ب ود ب اعمدة على اف
وس د وس د وس د اعمدة على ا غ
فيعرف د من طول خطي

ب د وس د ووضع د بطول خطي ب د وس د ووضع د من خطي ب د وس د وقد سمي الخطان المرسومان كما ذكر من نقطة ما في خط منحني معيني تلك

النقطة ولأجل التمييز بين الخططين قد سمي ب د مثلاً معين نقطة د وس د فصلتها
فنستعمل غالباً المعينة على خط آ ف وهي مساوية للفصلة على آ غ ا ب ا ب = آ س
وب ب = س س الح (اقليدس ك ١ ق ٣٣) وسمي آ ف وآ غ محورَي المعين

٢٧٥ انه ان رسم خطوط معينة من كل نقطة في خط معين ودل على نسبة
المعينة الى فصلاتها بواسطة معادلة فيعين بذلك كل نقطة من المنحنى لالمحالة. ويعلم
شكلاً وكثير من خصائصه بواسطة تحويل المعادلة بالمقابلة والتقسمة والترقية والتجذير
وهلم جزاً. واما نقط معين غير معدودة فلا يمكن رسم معين لكل واحدة منها ولكن لنا
طريقة لتحصيل معادلة دالة على جميع اجزاء المنحنى وهي بناء المعادلة على خاصية
مشتركة بين كل زوج مركب من معين وفصلته وفي ايضاح ذلك لننظر اولاً الى

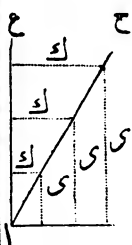
خط مستقيم ليكن آ ح خطا ويرسم منه
معينات وفصلات على المحورين آ ف وآ غ
العمودين احدهما على الآخر وتجعل زاوية
ف آ ح حتى تكون الفصلة س د او ا ب
مضاعف المعين ب د فتكون المثلثات ا ب د
ا ب د و ا ب د متشابهة اقليدس (ق ٢٦ ك ١) اذا

ا ب : ب د :: ا ب : ب د :: ا ب : ب د وان فرض ا ب = ٢ ب د فحينئذ
ا ب = ٢ ب د و ا ب = ٢ ب د الح ا ب كل فصلة = مضاعف معينها. ولكن لانحنا
الى معادلة لكل زوج من معين مع فصلته بل تكفي واحدة للجميع. فلنفرض ك =
احدى الفصلات وي = معينها اذا ك = ٢ ي او ي = ١ ك وهذه معادلة دالة
على نسبة المعينات والفصلات بعضها لبعض. ولا فرق بينها وبين ما سواها من
المعادلات غير انه ليس لحرفي ك وي قيمة معلومة الا انها دالتان على معين نقطة
وفصلتها. ثم ان فرض ك = ا ب اذا ي = ب د

وان فرض ك = ا ب . ي = ب د
ك = ا ب . ي = ب د الح

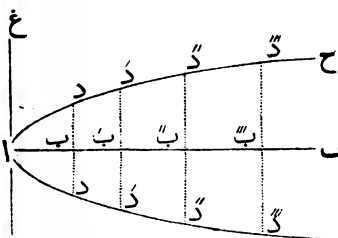
فان عين طول احد الزوجين يعرف الآخر من المعادلة فان فرض ك = ٢

إذا $y = 1$ وان فرض $k = 8$ فإذا $y = 4$ وان فرض $k = 100$ فإذا $y = 50$ الخ



٢٧٦ إذا اختلفت زاوية ح آ ف عما سبق في الرسم السابق كما يرى في هذا الرسم تبقى المعادلة على حالها إلا في مسمى ك فلنفرض ت دالة على نسبة y الى k اي $y : k :: ت : ١$ فتصير المعادلة. $ت = ك = y$ فيكون المسمى ت صحيحاً او كسراً حسبما كانت y اكبر من ك او اصغر منها

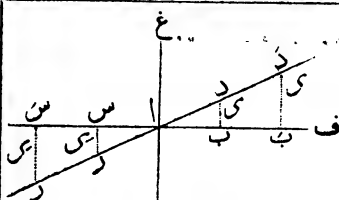
ثم لنستعمل ما قد اوضح في تحصيل معادلة دالة على خط منحنٍ. ولنفرض انه يراد معادلة دالة على شكل شلجي. فمن خصائص هذا الشكل كما يتضح في حساب قطع المخروط ان الفصالات مناسبة الى مربعات المعينات. فلنكن ت نسبة مربع احدى المعينات الى فصلتها. ولما كانت هذه النسبة هي هي بين كل زوج من معين وفصلة في الشكل كله يحدث من ذلك هذه المعادلة $y : k :: ت : ١$ وت $k = y$ وهي معادلة المنحنى وتصح في كل نقطة منه. ومهما تغيرت ك و y تبقى ت على حالها ثم ان كان $ت = ك = y$ فبالجذر $y = k$ وان كان $ت = ٢$ اذا $y = ٢٦ = ك$



وان فرض $k = ٤٠ = اب$
فإذا $y = ٣ = ٩٦ = ٤٠ \times ٢٦ = ب$
وان فرض $k = ٨ = اب$ فإذا
 $y = ٤ = ١٦٦ = ٨ \times ٢٦ = ب'$
وان فرض $k = ١٢٠ = اب$ فإذا

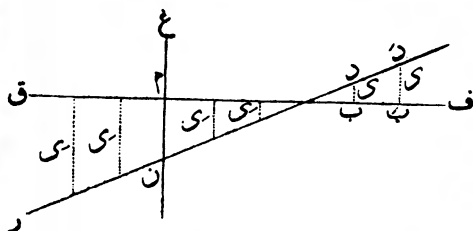
$ب' = ٥ = ٢٥٦ = ١٢٠ \times ٢٦ =$ وان فرض $k = ١٨ = اب$ فإذا
 $ب'' = ٦ = ٣٦٦ = ١٨ \times ٢٦ =$

٢٧٧ متى رسمت المعينات على جانبي القطر تكون الواقعة فوقه ايجابية والواقعة تحته سلبية. مثالة في الرسم السابق ان حسب المعينات فوق آ ف ايجابية تكون التي تحته سلبية والفصالات الواقعة عن اليمين مثل اب اب الخ ان حسب



ايجائية فتكون الواقعة من اليسار مثل
اس اس سليية وفي حل مسئلة ان خرج
معين او فصلة سليية بوخذ على جانب المحور
المقابل للجانب المحسوب ايجائياً

٢٧٨ اننا في ما تقدم نرى الخط المستقيم او المنحني يقطع المحور في نقطة تقاطع
المحورين كما يرى من الرسوم السابقة ولكن ليس كذلك في كل حين. فبممكن ان
نحسب الفصالات على المحور ق ف من خط غ ن فلنفرض ك = احدى الفصالات



م ب او م ب' الخ وي =
معينها ولنفرض ل = ا ب
ود = م آ وت = نسبة
ب د : ا ب اذا ت ل =

ي ول = ت ولكن

بالشكل ا ب = م ب - م ا اي ل = ك - ب وبساواة المعادلتين ك - ب =
ت وك = ت + ب

٢٧٩ يجب ان يعلم بالتدقيق متى تكون المعينات والفصالات ايجائية ومتى
تكون سليية ومتى ينتهي احدها. فنرى ان الفصلة تنتهي وتنتهي في نقطة التقاء الخط
المنحني بالمحور الذي تقاس الفصالات عليه. والمعينة تنتهي عند نقطة التقاء المنحني
بالمحور الذي تقاس المعينات عليه. مثالة في رسم الشلجي السابق نرى المعينات
تقاس على خط آ ف فيقل طولها شيئاً فشيئاً بتقريب المنحني الى المحور الى ان تزول
بالكلية في نقطة التقاءها. والفصالات تقاس على خط آ غ وتقل ايضاً كما سبق الى
ان تنتهي عند آ

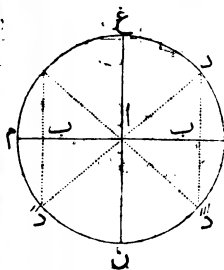
٢٨٠ الامر واضح انه اذا التقى المحوران بالمنحني في نقطة واحدة تنتهي
المعينات والفصالات معاً كما في الرسم المشار اليه. ولكن (في رسم رقم ٢٧٨) نرى
المحور م ف يقطع خط ن د في آ وغ ن يقطعه في ن فالمعينات اي م ف تنتهي
عند آ والفصالات اي غ ن تنتهي عند م او ن

٢٨١ كل معين او فصلة بتغير من ايجاب الى سلب عند مروره في نقطة الثلاثي اي النقطة التي فيها تكون قيمته صفراً. مثاله في رسم رقم ٢٧٧ نرى المعين $\overline{ي}$ يقل شيئاً فشيئاً الى ان يتلاشى في $\overline{آ}$ ثم يصير سلباً لانه يقع تحت المحور $\overline{س ف}$ وكذلك الفصالات عن $\overline{ي$ ين $\overline{آ غ}$ نقل شيئاً فشيئاً الى ان يتلاشى عند $\overline{آ}$ ثم يصير سلبية عن $\overline{يسار آ غ}$ ونرى هنا ان الاثنتين تغيرتا معاً في نقطة واحدة ولكن في رسم رقم ٢٧٨ نرى المعينات تتغير عند $\overline{آ}$ والفصالات تبقى ايجابية الى $\overline{غ ن}$ وبين $\overline{آ ن غ}$ تكون المعينات سلبية والفصالات ايجابية

٢٨٢ ان استعمال هذه القواعد وغيرها هو من متعلقات حساب قطع المخروط ومقصودنا الان انما هو ذكر بعض امثلة لايضاح ما قيل ولتسهيل ادراك بعض اشياء تقع تحت نظرنا قبل الوصول الى حساب قطع المخروط الذي هو الطبقة العليا من العلوم التعليمية

$\overline{ع آ}$ لنا ان نجد معادلة دائرية ما فلنفرض دائرة $\overline{ف غ م}$ ولنرسم القطرين $\overline{غ ن}$ $\overline{ف م}$ احدهما عمودياً على الاخر ارم من اية نقطة شئت في المنحني اي محيط الدائرة المعين $\overline{د ب}$ عمودياً على $\overline{آ ف}$ فيكون $\overline{آ ب}$ الفصلة المناظرة للمعين $\overline{د ب}$

ثم لنفرض نصف القطر $\overline{آ د} = \overline{رو آ ب} = \overline{ك}$
 $\overline{و ب د} = \overline{ي}$
 حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١) $\overline{ب د} = \overline{ف د}$
 $\overline{آ د} - \overline{آ ب} = \overline{و ب د} - \overline{و ب د}$
 وبالمفروض $\overline{ي} = \overline{ر} - \overline{ك}$
 بالتجذير $\overline{ي} = \sqrt{\overline{ر} - \overline{ك}}$



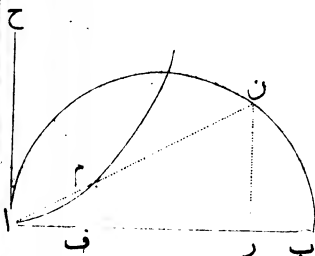
وعلى هذا السبيل $\overline{ك} = \sqrt{\overline{ر} - \overline{ي}}$ اي ان الفصلة تسوي الجذر المائي من فضلة مربع نصف القطر ومربع المعين. فان حسب نصف قطر الدائرة واحداً نصبر المعادلتان $\overline{ي} = \sqrt{\overline{ر} - \overline{ك}}$ و $\overline{ك} = \sqrt{\overline{ر} - \overline{ي}}$ ونحصل هذه المعادلة مهما كانت النقطة المفروضة في المحيط لان المعين والفصلة يكونان ضلعي مثلث ذي قائمة و $\overline{آ د}$ الوتر لانه نصف قطر الدائرة ونرى للمعادلتين قيمة ملتبسة اي تكون ايجابية او سلبية فتحسب المعينات والفصالات في الربع الاول $\overline{غ آ ف}$ ايجابية وفي الربع الثاني $\overline{غ م ن ف}$ تبقى

المعينات ايجابية وتصهر الفصالات سلبية وفي الربع الثالث م ن تصيران سلبيتين وفي
الربع الرابع ن ف تبقى المعينات سلبية وتعود الفصالات ايجابية لحي

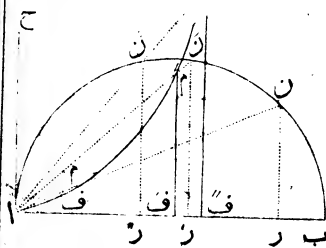
ف غ	تكون ك + وى +	} في ربع
غ م	ك - وى +	
م ن	ك - وى -	
ن ف	ك + وى -	

٢٨٢ قد بحسب في الهندسة ان الخطوط حاصلة من حركة نقطة فان
تحركت الى جهة واحدة حصل خط مستقيم. وان تغيرت الجهة في كل وقت حصل
خط منحن. وكيفية المنحن وشكله متعلقان بكيفية تلك الحركة. فان تحركت النقطة
على بُعد واحد من نقطة اخرى ثابتة حصلت دائرة تكون الثابتة مركزها وعرفنا
معادلتها من معرفة كيفية هذه الحركة. وهكذا نحصل على معرفة معادلات جميع انواع
المنحنيات بمعرفة كيفية حركة النقطة في رسمها كما سنرى من الامثلة الآتية

ع ٢ لنا ان نجد معادلة المنحنى المسمى رديف ديبوكليس وكيفية رسمه في ان



ناخذ نصف دائرة ا ب وفي القطر ا ب
خذ نقطة ر وليكن بعد ف من ا مساوياً لبعـ
ر من ب ا رسم ر ن عموداً على ا ب وليقطع
الحيط في ن ا وصل بين ا و ن ومن ف ا رسم
ف م عموداً على ا ب يلاقي ان في م فالخط



المنحنى ماراً بنقطة م فان اخذ ف على ابعاد
مختلفة من ا نتعين اية عدة فرضت من نقط
المنحنى. اذ كلما تقدم خط ف م الى ناحية ب
طال. ثم لكي نجد معادلة هذا المنحنى ليكن
اج و ا ب المحورين ولنفرض كل واحدة من
الفصالات آف اف ا ف = ك

وكل واحدة من المعينات ف م ف م ف م = وى

والفطرا ب = ب

اذا فب = اب = اف = ب - ك

ولان مَرْنِ عَودان على اب فثلك اف م يشبه ثلك ارن اقلدس
(ق ٢٧ وق ٢٩ ك ١)

(١) بالمثلثات المتشابهة اف:فم::ار:رن

(۲) اوبوضع ف ب عوض آر تصیر اف : ف م :: ف ب : ر ن

(۴) اذا $\frac{f_m \times f_b}{f} = r_n$

(٤) بتربيع الجانبيين

(٥) حسب افليدس (ق ٢٥ ك ٢ وق ٢ ك ٢) $ار \times رب = رن$

(۶) بوضع ف ب عوض آر و آ ف عوض ر ب نصیر ف ب × اف = ر ن

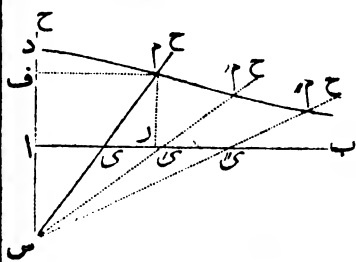
(٧) بمساواة (٤) و (٦) $f_b \times a_f = \frac{f_2 \times f_1}{a_f}$

(۸) إذا $\overline{af} = \overline{fm}$ \times فب

(۹) او حتما فرض كُ = ی' × (ب - ك)

اي كعب النصلة يعدل مربع المعين في فضلة قطر الدائرة والنصلة. وهكذا في كل زوج من معين ونصلة

٣٤ لنا ان نجد معادلة المخفي المسمى بوق نكوميدس . وكيفية رسمه ان نأخذ



خطاً مفروضاً وضعا مثل آب ولكن س
 نقطة خارجة عنه ويدور خط س ح
 حول هذه النقطة وفي كل نقطة من مروره
 بخط آب اجعل ي م و ي م و ي م
 مساوياً لخط آد فيمر المنحنى بنقط د وم

فلنفرض الفصلة $\overline{اف} = \overline{فم} = \overline{ك}$

فلنفرض المعينة $\overline{رم} = \overline{اف} = \overline{ي}$

فلنفرض الخط المفروض $\overline{سا} = \overline{ت}$

و $\overline{اد} = \overline{يم} = \overline{ب}$

فإذا $\overline{سف} = \overline{سا} + \overline{اف} = \overline{ت} + \overline{ي}$

لان $\overline{سم}$ يقطع المتوازيين $\overline{سد}$ و $\overline{رم}$ وايضاً يقطع $\overline{ار}$ و $\overline{فم}$ فنلنا $\overline{سم}$

و $\overline{ري}$ متشابهان

(١) بالمثلثات المتشابهة $\overline{سف} : \overline{فم} :: \overline{رم} : \overline{ري}$

(٢) و $\overline{ري} = \frac{\overline{فم} \times \overline{رم}}{\overline{سف}}$

(٣) بتربيع الجانبين $\overline{ري}^2 = \frac{\overline{فم}^2 \times \overline{رم}^2}{\overline{سف}^2}$

(٤) حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١) $\overline{ري}^2 = \overline{يم}^2 - \overline{رم}^2$

(٥) بمساواة (٣) و (٤) $\overline{ري}^2 = \overline{رم}^2 - \overline{فم}^2$

(٦) اي بالمفروض $\overline{ب}^2 - \overline{ي}^2 = \frac{\overline{ك}^2 \overline{ي}^2}{(\overline{ت} + \overline{ي})^2}$

(٧) او $(\overline{ت} + \overline{ي})^2 \times (\overline{ب}^2 - \overline{ي}^2) = \overline{ك}^2 \overline{ي}^2$

٢٨٤ نرى في الامثلة المتقدمة ان المعادلة اخذت من وصف كيفية المنحني

وقد يعكس العمل اي تُقرَض المعادلة ومنها يرسم المنحني بأخذ فصلات مختلفة وجعل

معينات لها قيم المنحني باطراف هذه المعينات

ع ٤ لنا ان نرسم منحنيًا بمعادلته $\overline{ك} = \overline{ي}^2$ او $\overline{ي} = \sqrt{\overline{ك}}$ (انظر رسم الشلبي)

خذ على خط $\overline{اف}$ فصلات مختلفة طولاً اي

$\overline{اب} = ٤$ فيكون المعين $\overline{ب}^2 = ٣$

$\overline{اب} = ٨$ فيكون المعين $\overline{ب}^2 = ٤$

أب = ١٢٥ فيكون المعين ب د = ٥

أب = ١٨ فيكون المعين ب د = ٦

ثم ركب هذه المعينات مع فصلاتها وأوصل بين أطرافها بخط ا د د فيكون المنحني المطلوب. ولا ريب أن الخط يكون أقرب إلى المطلوب كلما زاد عدد المعينات والفصلات المأخوذة

٢٨٥ إذا وُهمت حركة نقطة حتى تمر بأطراف جميع المعينات المفروضة في معادلة يسمى الخط الحادث طريق النقطة أي الطريق التي تتحرك فيها والتي توجد فيها ابداً. ويسمى أيضاً طريق المعادلة التي منها تؤخذ مواضع النقطة في حركتها. مثالة أن الشئ يسمى طريق نقط د د أو طريق المعادلة ت ك = ي وقوس الدايقة هو طريق المعادلة ك = $\frac{1}{2} \sqrt{r^2 - y^2}$ فإذا معرفة طريق معادلة انما هي معرفة الخط المنحني أو المستقيم التي هي له

ع ه لئلا نجد طريق المعادلة ك = $\frac{y}{x}$ أو ت ك = ي التي فيها تفرض ك وى معينات وفصلات مختلفة وت كمية ثابتة معينة فان اخذ المعين ك على اطوال مختلفة فلا بد للفصلة ي أن تتغير بالنسبة الى ك حتى تبقى المعادلة ت ك = ي أو بجل المعادلة الى نسبة ي : ك :: ت : ا أي لا تتغير نسبة ي : ك لان ت كمية معينة أي تكون نسبة فصلة الى معينها كنسبة فصلة اخرى الى معينها مهما كان. فلنفرض فصلتين ا ب ا ب (رسم رقم ٢٧٥) وب د وب د معينهما اذا ا ب : ب د :: ا ب : ب د فيكون خط ا د د مستقيماً (أقليدس ق ٢٢ ك ٦) وهو طريق المعادلة

ثم ان كانت المعادلة المفروضة ك = $\frac{y}{x}$ + ب فزيادة ب لا تنسب تغييراً في الطريق. لان ب انما يزيد طول الفاصلات فقط. وعوض ان نقاس من آ نقاس من نقطة اخرى مثل م في رسم رقم ٢٧٨ وتبقى نسبة ا ب او ا ب الى ب د او ب د كما كانت فيكون الخط مستقيماً

٢٨٦ يبرهن مما سبق ان كل معادلة تكون ك وى أي الفاصلات والمعينات في اجزاء مختلفة منها. وليس لها الا القوة الاولى تكون طريقها خطاً مستقيماً لان كل معادلة من هذا النوع يمكنها ان تتحول الى ك = $\frac{y}{x}$ + ب كما يتضح من هذه العملية

ع ٦ لنا ان نجد طريقة المعادلة

$$س ك - د + ح ك - ي = م - ن$$

$$بالمقابلة س ك + ح ك = ي + ن - م + د$$

$$وبالقسمة على س + ح نصير ك = \frac{ي}{س + ح} + \frac{ن - م + د}{س + ح}$$

فيمكن هنا ان يدل على الكميات الثابتة بالتعويض عنها بحرف واحد. فلنفرض

$$س + ح = ت \text{ و } \frac{ن - م + د}{س + ح} = ب \text{ فتصير المعادلة ك} = \frac{ي}{ت} + ب$$

التي طريقها خط مستقيم كما تقدم

٢٨٧ ثم انه متى كانت المعينات مناسبة لمربعات الفصالات او لكتوبها او للقوة الرابعة منها وهلم جرا يكون طريق المعادلة خطأ منجياً لان نسبة المعينات الموضوعة على خط مستقيم تكون نسبة بعضها الى بعض ذات النسبة الكائنة بين فصالاتها. ولكن لا تكون نسبة كميات بعضها الى بعض كنسبة مربعاتها او كتوبها او قوائمها الرابعة والخامسة وهلم جرا كما علم من باب النسبة. مثاله ان فرض ك^٢ = ي فتريد المعينات اكثر من الفصالات فان اخذت الفصالات ١ و ٢ و ٣ و ٤ الخ تكون المعينات مساوية لمربعاتها اي ١ و ٤ و ٩ و ١٦ الخ

٢٨٨ ان عدة المعادلات التي يمكن ان تتركب من قوات المعينات والفصالات المختلفة هي غير متناهية. وكل معادلة لها طريق مخصوص بها. اذا تكون اشكال المنحنيات غير متناهية ولكن يمكن ان تنحصر في انواع. وقد جرت العادة عند المولدين ان يرتبوا في انواع حسب درجات معادلاتها فيدل على انواع الخطوط بالدليل الاعظم او بمجموع دلائل المعينات والفصالات في جزء من المعادلة. مثاله ت ك = ي تنحصر بخط من النوع الاول لان الدليل في كل معين وفصلة انما هو واحد وليس في هذا النوع منحن كما راينا سابقاً

والمعادلة س ك - ت ك ي = ي^٢ منحصصة بالنوع الثاني من الخطوط والنوع الاول من المنحنيات لان الدليل الاعظم هو ٢ وت ي + ك ي = ب ك تنحصر بالنوع الثاني ايضاً. لانه وان لم يكن فيها دليل اكبر من واحد لكن مجموع دلائل ك ي في الجزء الثاني اي ١ + ١ = ٢ وي^٢ - ٣ ت ك ي = ب ك^٢ منحصصة

بالنوع الثالث من الخطوط والثاني من المنحنيات لان دليل \bar{y} الاعظم هو ٢٨٩ في منحنيات من الانواع العالية قد يمكن ان تكون لمعين فصل ما قيمات مختلفة فيلنفي المعين بالمنحني في نقط متعددة لان طول المعين متوقف على معادلة المنحني. وان كانت المعادلة فوق الدرجة الاولى يكون لها قيمتان فاكثركا رابنا سابقا فتكون للمعين قيمات مختلفة

ان معادلة من الدرجة الاولى لها قيمة واحدة فقط وخطها ينقطع المعين في نقطة واحدة فقط. مثاله معادلة خط $\bar{A}\bar{C}$ (رسم رقم ٢٧٥) هي $\bar{A}\bar{K} = \bar{y}$ فنرى ان \bar{y} لها قيمة واحدة فقط وك لا تتغير. فان اخذ الفصلة $\bar{K} = \bar{A}\bar{B}$ يكون المعين $\bar{y} = \bar{B}\bar{D}$ الذي يمكنه ان يلاقي $\bar{A}\bar{C}$ في \bar{D} فقط

ولكن معادلة الشلجي $\bar{y} = \bar{A}\bar{K}$ لها قيمتان كما نرى من تجذير الجانبيين اي $\bar{y} = \bar{A}\bar{K} \pm \sqrt{\bar{A}\bar{K}}$ احداها ايجابية والاخرى سلبية وذلك دليل على امكان اخراج المعين الى جهتيه من طرف الفصلة فيمكنه ان يلاقي جزءا آخر من المنحني. مثاله معين الفصلة $\bar{A}\bar{B}$ (رسم ٨٥) الشلجي قد يمكنه ان يكون $\bar{B}\bar{D}$ فوق الفصلة او $\bar{B}\bar{D}$ تحته

قد رابنا سابقا ان معادلة مكعبة لها ثلاثة جذور اي ثلاث قيمات فتكون لمعين منحني من نوعها ثلاث قيمات فيمكنه ان يلاقي المنحني في ثلاث نقط. مثاله معين الفصلة $\bar{A}\bar{B}$ قد يمكن ان يكون $\bar{B}\bar{D}$ او $\bar{B}\bar{D}$ او $\bar{B}\bar{D}$

٢٩٠ اذا التقى المنحني بالمحور الذي تقاس عليه الفصالات نقل المعينات شيئا فشيئا الى ان تلاشى كما تقدم. وقد يمكن ان يتقرب منحني الى خط ابدا بدون

ان يلاقه. فلنفرض على خط $\bar{A}\bar{F}$ ابعادا متساوية $\bar{A}\bar{B}$ و $\bar{B}\bar{B}'$ و $\bar{B}\bar{B}''$ و $\bar{B}\bar{B}'''$ ولنفرض شكل المنحني $\bar{D}\bar{D}'\bar{D}''\bar{D}'''$ على كيفية حتى يكون كل معين عند نقط $\bar{B}\bar{B}'\bar{B}''\bar{B}'''$ الخ نصف الذي عن يساره اي $\bar{B}\bar{D}$ نصف $\bar{B}\bar{D}'$ و $\bar{B}\bar{D}''$ نصف $\bar{B}\bar{D}'''$ الخ

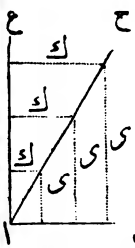
فالامر واضح انه مها اخرج المنحني على هذه الكيفية لا يلاقي $\bar{A}\bar{F}$ بل يبقى متقرا الي ابدا. وكل خط على هذه الكيفية اي الذي يتقرب ابدا الى منحني بدون ان يلاقي به

يسمى متقاربة فالهوراف هو متقارب المنحني د د' فكما زادت الفصلة قل المعين .
 ومتى حسبت الفصلة غير متناهية حسبما ذكر في فصل الغير المتناهيات بصير المعين
 شبيهاً بالغير المتناهي فيدل عليه بصير والامتداد في هذا الباب من خصائص حساب
 قطع المخروط هذا ما اقتضى وضعه في علم الجبر والمقابلة
 والحمد لله الذي لا يحاط به علماً
 انتهى

وكان الفراغ من تبييضه في الحادي والعشرين من شهر كانون الثاني سنة ١٨٥٢ مسيحية

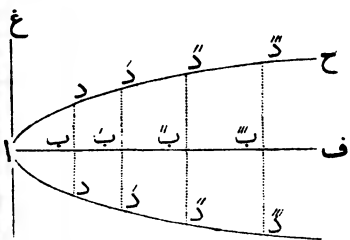
طبع في بيروت سنة ١٨٥٢ مسيحية

إذا $ا = ١$ وان فرض $ك = ٨$ فإذا $ا = ٤$ وان فرض $ك = ١٠٠$ فإذا $ا = ٥٠$ الخ



٢٧٦ إذا اختلفت زاوية ح آ ف عما سبق في الرسم السابق كما يرى في هذا الرسم تبقى المعادلة على حالها إلا في مسمى ك فلنفرض ت دالة على نسبة ي الى ك اي $ي : ك :: ت : ١$ فتصير المعادلة $ت ك = ي$ فيكون المسمى ت صحيحاً او كسراً حسبما كانت ي اكبر من ك او اصغر منها

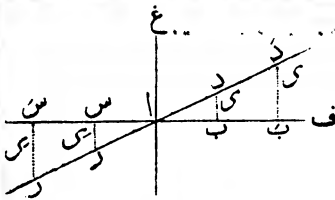
ثم لنستعمل ما قد اوضح في تحصيل معادلة دالة على خط منحنى. ولنفرض انه يراد معادلة دالة على شكل شلجي. فمن خصائص هذا الشكل كما يتضح في حساب قطع المخروط ان النصلات مناسبة الى مربعات المعينات. فلنكن ت نسبة مربع احدى المعينات الى فصلها. ولما كانت هذه النسبة هي في بين كل زوج من معين وفصلة في الشكل كله مجدت من ذلك هذه المعادلة $ي : ك :: ت : ١$ وت $ك = ي$ وهي معادلة المنحني ونصح في كل نقطة منه. ومهما تغيرت ك وي تبقى ت على حالها ثم ان كانت $ك = ي$ فبالجذر $ي = ت ك$ وان كان $ت = ٢$ اذا $ي = ٢ ك$



وان فرض $ك = ٤٠٥ = ا ب$ فإذا $ي = ٢ = ٩٦ = ٤٠٥ \times ٢٦ = ا ب$ فإذا $ا ب = ٨ = ا ب$ فإذا $ي = ٤ = ١٦ = ٨ \times ٢ = ا ب$ فإذا $ا ب = ١٢٠ = ا ب$ فإذا $ا ب = ١٢٠ = ا ب$

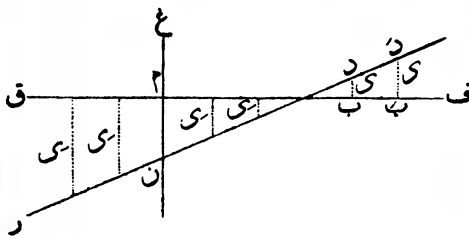
وان فرض $ك = ١٨ = ا ب$ فإذا $ي = ٥ = ٢٥ = ١٢٠ \times ٢ = ا ب$ فإذا $ي = ٦ = ٣٦ = ١٨ \times ٢ = ا ب$

٢٧٧ متى رسمت المعينات على جانبي القطر تكون الواقعة فوقه ايجابية والواقعة تحته سلبية. مثالة في الرسم السابق ان حسب المعينات فوق آ ف ايجابية تكون التي تحته سلبية والنصلات الواقعة عن اليمين مثل ا ب ا ب الخ ان حسب



إيجابية فتكون الواقعة عن اليسار مثل
اس اس سلبية. وفي حل مسألة ان خرج
معين او فصلة سلبياً بوخذ على جانب المحور
المقابل للجانب المحسوب إيجابياً

٢٧٨ اننا في ما تقدم نرى الخط المستقيم او المنحني يقطع المحور في نقطة تقاطع
المحورين كما يرى من الرسوم السابقة ولكن ليس كذلك في كل حين. فيمكن ان
نحسب الفصالات على المحور ق ف من خط غ ن فلنفرض ك = احدى الفصالات



م ب او م ب الخ وي =
معينها ولنفرض ل = ا ب
ود = م آ وت = نسبة
ب د : ا ب اذا ت ل =
ي ول = ي ت ولكن

بالشكل ا ب = م ب - م ا اي ل = ك - ب وبساواة المعادلتين ك - ب =
ي ت وك = ي ت + ب

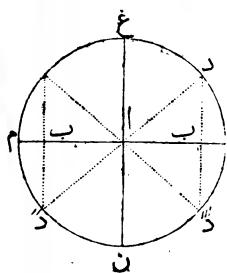
٢٧٩ يجب ان يعلم بالتدقيق متى تكون المعينات والفصالات ايجابية ومتى
تكون سلبية ومتى ينتهي احدها. فنرى ان الفصلة تنتهي وتنتهي في نقطة التقاء الخط
المنحني بالمحور الذي تقاس الفصالات عليه. والمعينة تنتهي عند نقطة التقاء المنحني
بالمحور الذي تقاس المعينات عليه. مثالة في رسم الشلجي السابق نرى المعينات
تقاس على خط آ ف فيقل طولها شيئاً فشيئاً بتقريب المنحني الى المحور الى ان تزول
بالكلية في نقطة التقاءها. والفصالات تقاس على خط آ غ وتقل ايضاً كما سبق الى
ان تنتهي عند آ

٢٨٠ الامر واضح انه اذا التقى المحوران بالمنحني في نقطة واحدة تنتهي
المعينات والفصالات معاً كما في الرسم المشار اليه. ولكن (في رسم رقم ٢٧٨) نرى
المحور م ف يقطع خط ن د في آ و غ ن يقطعه في ن فالمعينات اي م ف تنتهي
عند آ والفصالات اي غ ن تنتهي عند م آ ون

٢٨١ كل معين او فصلة بتغير من ايجاب الى سلب عند مروره في نقطة التلاشي اي النقطة التي فيها تكون قيمته صفراً. مثاله في رسم رقم ٢٧٧ نرى المعين $\overline{ى}$ يقل شيئاً فشيئاً الى ان يتلاشى في $\overline{آ}$ ثم يصير سلباً لانه يقع تحت المحور $\overline{س ف}$ وكذلك الفصالات عن $\overline{بين آ غ}$ نقل شيئاً فشيئاً الى ان تتلاشى عند $\overline{آ}$ ثم يصير سلبية عن $\overline{يسار آ غ}$ ونرى هنا ان الاثنتين تغيرتا معاً في نقطة واحدة ولكن في رسم رقم ٢٧٨ نرى المعينات تتغير عند $\overline{آ}$ والفصالات تبقى ايجابية الى $\overline{غ}$ و $\overline{بين آ غ}$ تكون المعينات سلبية والفصالات ايجابية

٢٨٢ ان استعمال هذه القواعد وغيرها هو من متعلقات حساب قطع المخروط ومقصودنا الان انما هو ذكر بعض امثلة لايضاح ما قيل ولتسهيل ادراك بعض اشياء تقع تحت نظرنا قبل الوصول الى حساب قطع المخروط الذي هو الطبقة العليا من العلوم التعليمية

$\overline{ع آ}$ لنا ان نجد معادلة دائرية ما فلنفرض دائرة $\overline{ف غ م}$ ولنرسم القطرين $\overline{غ ن}$ $\overline{ف م}$ احدهما عمودياً على الاخر ارس من اية نقطة شئت في المنحني اي محيط الدائرة المعين $\overline{د ب}$ عمودياً على $\overline{آ ف}$ فيكون $\overline{آ ب}$ الفصلة المناظرة للمعين $\overline{د ب}$



ثم لنفرض نصف القطر $\overline{آ د} = \overline{رو آ ب} = \overline{ك}$
وب $\overline{د} = \overline{ى}$

حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١) $\overline{ب د}^2 = \overline{ف ب}^2 + \overline{ب د}^2$
 $\overline{آ د}^2 - \overline{آ ب}^2$

وبالمفروض $\overline{ى}^2 = \overline{ر}^2 - \overline{ك}^2$

بالتجذير $\overline{ى} = \sqrt{\overline{ر}^2 - \overline{ك}^2}$

وعلى هذا السبيل $\overline{ك} = \sqrt{\overline{ر}^2 - \overline{ى}^2}$ اي ان الفصلة تسوي الجذر المالى من فضلة مربع نصف القطر ومربع المعين. فان حسب نصف قطر الدائرة واحداً نصير المعادلتان $\overline{ى} = \sqrt{\overline{ر}^2 - \overline{ك}^2}$ و $\overline{ك} = \sqrt{\overline{ر}^2 - \overline{ى}^2}$ وتحصل هذه المعادلة مهما كانت النقطة المفروضة في المحيط لان المعين والفسلة يكونان ضلعي مثلث ذى قائمة و $\overline{آ د}$ الوتر لانه نصف قطر الدائرة ونرى للمعادلتين قيمة ملتبسة اي تكون ايجابية او سلبية فتحسب المعينات والفصالات في الربع الاول $\overline{غ آ ف}$ ايجابية وفي الربع الثاني $\overline{غ م ن}$ تبقى

ا ب = ١٢٥ فيكون المعين ب د = ٥

ا ب = ١٨ فيكون المعين ب د = ٦

ثم ركب هذه المعينات مع فصلاتها واصل بين اطرافها بخط ا د د فيكون المنحني المطلوب. ولا ريب ان الخط يكون اقرب الى المطلوب كلما زاد عدد المعينات والفصلات المأخوذة

٢٨٥ اذا وُهمت حركة نقطة حتى تمر باطراف جميع المعينات المفروضة في معادلة يسمى الخط الحادث طريق النقطة اي الطريق التي تتحرك فيها والتي توجد فيها ابداً. ويسمى ايضاً طريق المعادلة التي منها تؤخذ مواضع النقطة في حركتها. مثالة ان الشئ يسمى طريق نقط د د او طريق المعادلة ت ك = ي وقوس الدائرة هو طريق المعادلة ك = $\frac{1}{2} \sqrt{r^2 - y^2}$ فاذا معرفة طريق معادلة انما هي معرفة الخط المنحني او المستقيم التي هي له

ع ٥ لنا ان نجد طريق المعادلة ك = $\frac{y}{x}$ او ت ك = ي التي فيها تقرر ك وى معينات وفصلات مختلفة وت كمية ثابتة معينة فان اخذ المعين ك على اطوال مختلفة فلا بد للفصلة ي ان تتغير بالنسبة الى ك حتى تبقى المعادلة ت ك = ي او بحل المعادلة الى نسبة ي : ك :: ت : ١ اي لا تتغير نسبة ي : ك لان ت كمية معينة اي تكون نسبة فصلة الى معينها كنسبة فصلة اخرى الى معينها مهما كان. فلنفرض فصلتين ا ب ا ب (رسم رقم ٢٧٥) وب د وب د معينهما اذا ا ب : ب د :: ا ب : ب د فيكون خط ا د مستقيماً (اقليدس ق ٢٢ ك ٦) وهو طريق المعادلة

ثم ان كانت المعادلة المفروضة ك = $\frac{y}{x}$ + ب فزيادة ب لا تنسب تغييراً في الطريق. لان ب انما يزيد طول الفاصلات فقط. وعوض ان نقاس من آ نقاس من نقطة اخرى مثل م في رسم رقم ٢٧٨ وتبقى نسبة ا ب او ا ب الى ب د او ب د كما كانت فيكون الخط مستقيماً

٢٨٦ يبرهن ما سبق ان كل معادلة تكون ك وى اي الفاصلات والمعينات في اجزاء مختلفة منها. وليس لها الا القوة الاولى تكون طريقها خطاً مستقيماً لان كل معادلة من هذا النوع يمكنها ان نحول الى ك = $\frac{y}{x}$ + ب كما يتضح من هذه العملية

ع ٦ لنا ان نجد طريقة المعادلة

$$س ك - د + ح ك - ي + م = ن$$

$$\text{بالمقابلة } س ك + ح ك = ي + ن - م + د$$

$$\text{وبالتقسمة على } س + ح \text{ نصير } ك = \frac{ي}{س + ح} + \frac{ن - م + د}{س + ح}$$

فيمكن هنا ان يدل على الكميات الثابتة بالتعويض عنها بحرف واحد. فلنفرض

$$س + ح = ت \text{ و } \frac{ن - م + د}{س + ح} = ب \text{ فتصير المعادلة } ك = \frac{ي}{ت} + ب$$

التي طريقها خط مستقيم كما تقدم

٢٨٧ ثم انه متى كانت المعينات مناسبة لمربعات الفصالات او كعوبها او للقوة الرابعة منها وهلم جرا يكون طريق المعادلة خطأ مخفياً لان نسبة المعينات الموضوعة على خط مستقيم تكون نسبة بعضها الى بعض ذات النسبة الكائنة بين فصالاتها. ولكن لا تكون نسبة كميات بعضها الى بعض كنسبة مربعاتها او كعوبها او قواها الرابعة والخامسة وهلم جرا كما علم من باب النسبة. مثالة ان فرض $ك^٢ = ي$ فتريد المعينات اكثر من الفصالات فان اخذت الفصالات ١ و ٢ و ٣ و ٤ الخ تكون المعينات مساوية لمربعاتها اي ١ و ٤ و ٩ و ١٦ الخ

٢٨٨ ان عدة المعادلات التي يمكن ان تتركب من قوات المعينات والفصالات المختلفة هي غير متناهية. وكل معادلة لها طريق مختصة بها. اذا تكون اشكال المنحنيات غير متناهية ولكن يمكن ان تنحصر في انواع. وقد جرت العادة عند المولدين ان يرتبوا في انواع حسب درجات معادلاتها فيدل على انواع المخطوط بالدليل الاعظم او بمجموع دلائل المعينات والفصالات في جزء من المعادلة. مثالة $ت ك = ي$ تختص بخط من النوع الاول لان الدليل في كل معين وفصلة انما هو واحد وليس في هذا النوع مخن كما راينا سابقاً

والمعادلة $س ك - ت ك = ي$ مختصة بالنوع الثاني من المخطوط والنوع الاول من المنحنيات لان الدليل الاعظم هو ٢ وت $ي + ك = ب ك$ تختص بالنوع الثاني ايضاً. لانه وان لم يكن فيها دليل اكبر من واحد لكن مجموع دلائل $ك$ و $ي$ في الجزء الثاني اي $١ + ١ = ٢$ و $٣ - ٢ = ت ك = ي$ $ب ك$ مختصة

بالنوع الثالث من الخطوط والثاني من المنحنيات لان دليل \bar{C} الاعظم هو ٢٨٩ في منحنيات من الانواع العالية قد يمكن ان تكون لمعين فصله ما قيمات مختلفة فيلنقي المعين بالمنحني في نقط متعددة لان طول المعين متوقف على معادلة المنحني. وان كانت المعادلة فوق الدرجة الاولى يكون لها قيمتان فاكثر كما راينا سابقاً فتكون للمعين قيمات مختلفة

ان معادلة من الدرجة الاولى لها قيمة واحدة فقط وخطها يقطع المعين في نقطة واحدة فقط. مثاله معادلة خط $\bar{A}\bar{C}$ (رسم رقم ٢٧٥) هي $\bar{A}K = \bar{C}$ فزى ان \bar{A} لها قيمة واحدة فقط وك لا تتغير. فان اخذ الفصلة $\bar{K} = \bar{A}$ يكون المعين $\bar{C} = \bar{B}$ الذي يمكنه ان يلاقى $\bar{A}\bar{C}$ في \bar{D} فقط

ولكن معادلة الشلجي $\bar{C} = \bar{A}^2$ ك لها قيمتان كما نرى من تجذير الجانبيين اي $\bar{C} = \bar{A}^2$ $\bar{A} = \sqrt{\bar{C}}$ احداها ايجابية والاخرى سلبية وذلك دليل على امكان اخراج المعين الى جهتيه من طرف الفصلة فيمكنه ان يلاقى جزءاً آخر من المنحني. مثاله معين الفصلة $\bar{A}\bar{B}$ (رسم ١٨٥) الشلجي قد يمكنه ان يكون \bar{B} د فوق الفصلة او \bar{B} د تحنها

قد راينا سابقاً ان معادلة مكعبة لها ثلاثة جذور اي ثلاث قيمات فتكون لمعين منحني من نوعها ثلاث قيمات فيمكنه ان يلاقى المنحني في ثلاث نقط. مثاله معين الفصلة $\bar{A}\bar{B}$ قد يمكن ان يكون \bar{B} د او \bar{B} د او \bar{B} د

٢٩٠ اذا التقى المنحني بالمحور الذي تقاس عليه الفصالات نقل المعينات شيئاً فشيئاً الى ان تتلاشى كما تقدم. وقد يمكن ان يتقرب منحني الى خط ابدأ بدون

ان يلاقيه. فلنفرض على خط $\bar{A}\bar{F}$ ابعاداً متساوية $\bar{A}\bar{B}$ و $\bar{B}\bar{B}'$ و $\bar{B}'\bar{B}''$ و $\bar{B}''\bar{B}'''$ ولنفرض شكل المنحني $\bar{D}\bar{D}'\bar{D}''\bar{D}'''$ على كيفية حتى يكون كل معين عند نقط $\bar{B}\bar{B}'\bar{B}''\bar{B}'''$ الخ نصف الذي عن يساره اي $\bar{B}'\bar{D}$ نصف $\bar{B}\bar{D}$ و $\bar{B}''\bar{D}'$ نصف $\bar{B}'\bar{D}'$ الخ

فالامر واضح انه مما اخرج المنحني على هذه الكيفية لا يلاقى $\bar{A}\bar{F}$ بل يبقى متقرباً اليه ابدأ. وكل خط على هذه الكيفية اي الذي يتقرب ابدأ الى منحني بدون ان يلاقى به

بسمي متقاربة فالهوراف هو متقارب المنحني د د' فكما زادت الفصلة قل المعين .
 ومتى حسبت الفصلة غير متناهية حسبما ذكر في فصل الغير المتناهيات بصير المعين
 شبيهاً بالغير المتناهي فيدل عليه بصغر والامتداد في هذا الباب من خصائص حساب
 قطع المخروط هذا ما اقتضى وضعه في علم الجبر والمقابلة
 والحمد لله الذي لا يحاط به علماً
 انتهى

وكان الفراغ من تبييضه في الحادي والعشرين من شهر كانون الثاني سنة ١٨٥٢ مسيحية

طبع في بيروت سنة ١٨٥٢ مسيحية

This book is due two weeks from the last date stamped below, and if not returned at or before that time a fine of five cents a day will be incurred.

893.7195

V28

JAN 20 1937



CU58981063

V28

Kitab al-rawdah al-z